Prova scritta – 12/11/2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con $B_R(a,b)$ indichiamo la palla (aperta) di raggio $R > 0$ e centro (a,b) in $\mathbb{R}^2$, mentre per ogni $c \in \mathbb{R}$, $S(c)$ è il semispazio superiore*

$$S(c) = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > c\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

(A) $\Omega_A = \overline{B}_2(0,0) \cap \overline{S(1)}$;

(B) $\Omega_B = \overline{B}_2(0,0) \cup S(1)$;

(C) $\Omega_C = \overline{S(1)} \setminus B_2(0,0)$;

(D) $\Omega_D = \overline{B}_2(0,0) \setminus S(1)$;

(E) $\Omega_E = B_2(0,0) \cap \overline{S(1)}$;

(F) $\Omega_F = B_2(0,0) \setminus \overline{S(1)}$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti** *:* A, D

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = B_1(0,0) \cup \partial B_1(1,0)$$

$\partial D =$ $\partial B_1(0,0) \cup \left(\partial B_1(1,0) \setminus B_1(0,0)\right)$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in $(0,0)$ la funzione*

$$\frac{\cos(x-y)}{\sqrt{1+4x+2y}} = 1 - 2x - y + \frac{11}{2}x^2 + y^2 + 7xy + o(x^2+y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\sin(3t+t^2),\ \sin(2t)\Big)$ *e* $F(x,y) = \cos x\Big(\sin(x+y+xy) + \cos(2y)\Big)$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = 5$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{e^{x-2y}}{1+x+2y}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 20 \end{pmatrix}$ *La matrice H è:* definita positiva

---

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (\sin x - yx)\,dx + (xy + y^7)\,dy$ *e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \{(x,y)\ : 0 \le x \le y \le 1\}$ *in senso antiorario.*
Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$ $1/2$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(\frac{2x-y}{2+\cos(x^2+y^2)}, \frac{2y+x}{1+\sin(x^2+y^2)}\right)$.
Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R = \sqrt{\pi}$, calcolare $\displaystyle\iint_{B_R} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy =$ $4\pi^2$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^2y^3 - 4x^2 - 12xy.$$

(0,0) - punto di sella
(1,-2) - max relativo

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare il massimo della funzione*

$$F(x,y,z) = e^{x+2y+2z}$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2 \le 3\Big\}.$$

$\max_D F = e^{3\sqrt{3}}$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{3x}{y + \sqrt{2+5x^2+5y^2}},$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{|(x,y)|\to+\infty} F(x,y) =$ $3/2$

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{\sin(x^3y^{n+2})}{(x^2+y^2)^n} \quad se\ (x,y) \ne (0,0),$$

dove $n \ge 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.* $\forall n \ge 1$

(2) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.* $1 \le n \le 4$

(3) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.* $1 \le n \le 3$
