Prova scritta – 7/5/2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con* B_R *indichiamo la palla di raggio* $R > 0$ *e centro* $(0, 0)$ *in* $\mathbb{R}^2$

$$\overline{B}_R = \Big\{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 < R^2\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

$(A)\quad \Omega_A = \Big\{(0, 1) \times [0, 2)\Big\} \setminus \overline{B}_1\ ;$ $\qquad (B)\quad \Omega_B = \Big\{(0, 1) \times [0, 2)\Big\} \setminus B_1\ ;$

$(C)\quad \Omega_C = \Big\{(0, 1) \times [0, 2)\Big\} \setminus \partial B_1\ ;$ $\qquad (D)\quad \Omega_D = \Big\{(0, 1) \times [0, 2)\Big\} \cup \overline{B}_1\ ;$

$(E)\quad \Omega_E = \Big\{(0, 1) \times [0, 2)\Big\} \cup B_1\ ;$ $\qquad (F)\quad \Omega_F = \Big\{(0, 1) \times [0, 2)\Big\} \cap \overline{B}_1\ .$

Gli insiemi seguenti sono **aperti** *:*

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Bigg(B_2 \cup \Big\{(0, y) \ : \ 0 \le y \le 3\Big\}\Bigg) \setminus \Big\{(x, 0) \ : \ 0 \le x \le 1\Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0, 0)$ *la funzione*

$$\frac{\cos(2x)}{1 - x + y} =$$

Esercizio 4. *Siano* $\quad \gamma(t) = \Big(\cos(3t) - e^{2t},\ e^{4t}\sin(2t)\Big) \quad$ *e* $\quad F(x, y) = \dfrac{(1 - y)^2}{(1 + x)^3}.$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{2\cos(xy)-\cos(x+y)}{1-y}$ *in* $(0,0)$*. Dire se* H *è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H =$ *La matrice* H *è:*

Esercizio 6. *Siano* $\alpha = (e^x - 2y)\,dx + (xy + \cos y)\,dy$ *e* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *a tratti che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1 - x^2\right\}$ *in senso antiorario.*

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big(x\cos(x^2+y^2)\,,\,(x+2y)\sin(x^2+y^2)\Big)$.

Sulla palla B_R *di centro* $(0,0)$ *e raggio* $R = \sqrt{\pi}$*, calcolare* $\displaystyle\iint_{B_R} \mathrm{div}F(x,y)\,dx\,dy =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^2y^2 + 2x^3 - y^2.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F *in* $\mathbb{R}^2$ *e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

Esercizio 9. *Trovare i massimi ed i minimi della funzione*

$$F(x,y,z) = x^2 - x + 2y^2 + z^2\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\Big\}.$$

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + \frac{4y^2}{x^2+y^2}}\ .$$

Calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e* $\displaystyle\liminf_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e dire se esiste il limite* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^2y + (xy)^n}{x^2+y^2} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

dove $n \ge 1$ *è un numero intero.*

(1) *Per quali valori del parametro* $n \ge 1$ *la funzione è derivabile in* $(0,0)$.

(2) *Per quali valori del parametro* $n \ge 1$ *la funzione* F *è continua in* $(0,0)$.

(3) *Per quali valori del parametro* $n \ge 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$.
