Prova scritta – 7/5/2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

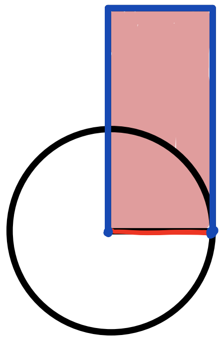
Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con* B_R *indichiamo la palla di raggio* $R>0$ *e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$

$$B_R = \Big\{(x,y)\ :\ x^2+y^2<R^2\Big\}.$$



Consideriamo gli insiemi

$(A)\quad \Omega_A = \Big\{(0,1)\times[0,2)\Big\}\setminus \overline{B}_1\ ;$

$(B)\quad \Omega_B = \Big\{(0,1)\times[0,2)\Big\}\setminus B_1\ ;$

$(C)\quad \Omega_C = \Big\{(0,1)\times[0,2)\Big\}\setminus \partial B_1\ ;$

$(D)\quad \Omega_D = \Big\{(0,1)\times[0,2)\Big\}\cup \overline{B}_1\ ;$

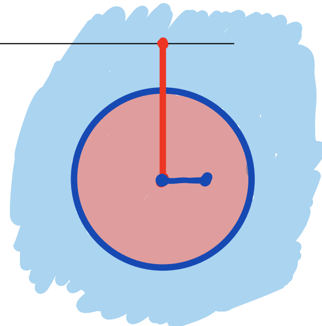
$(E)\quad \Omega_E = \Big\{(0,1)\times[0,2)\Big\}\cup B_1\ ;$

$(F)\quad \Omega_F = \Big\{(0,1)\times[0,2)\Big\}\cap \overline{B}_1\ .$

Gli insiemi seguenti sono **aperti** *:* A, E

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big(B_2\cup\Big\{(0,y)\ :\ 0\le y\le 3\Big\}\Big)\setminus\Big\{(x,0)\ :\ 0\le x\le 1\Big\}$$



$\partial D =$ $\partial B_2 \cup \{(0,y) : 2\le y\le 3\}\cup\{(x,0) : 0\le x\le 1\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{\cos(2x)}{1-x+y} = 1+x-y-x^2+y^2-2xy$$

Esercizio 4. *Siano* $\quad \gamma(t) = \Big(\cos(3t)-e^{2t}\,,\ e^{4t}\sin(2t)\Big)\quad$ *e* $\quad F(x,y) = \dfrac{(1-y)^2}{(1+x)^3}.$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = \gamma'(0)\cdot\nabla F(\gamma(0)) = (-2,2)\cdot(-3,-2) = 2$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{2\cos(xy) - \cos(x+y)}{1-y}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *La matrice H è:* definita positiva

---

Esercizio 6. *Siano* $\alpha = (e^x - 2y)\,dx + (xy + \cos y)\,dy$ *e* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *a tratti che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1 - x^2\}$ *in senso antiorario.*

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \int_\gamma (-2y\,dx + xy\,dy) = \int_\Omega (2+y)\,dy = \frac{16}{5}$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big(x\cos(x^2+y^2)\,,\,(x+2y)\sin(x^2+y^2)\Big)$.

Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R = \sqrt{\pi}$, calcolare $\displaystyle\iint_{B_R} \mathrm{div}F(x,y)\,dx\,dy = -\pi^2$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^2y^2 + 2x^3 - y^2.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare i massimi ed i minimi della funzione*

$$F(x,y,z) = x^2 - x + 2y^2 + z^2\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + z^2 \le 1\Big\}.$$

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + \frac{4y^2}{x^2+y^2}}\,.$$

Calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e* $\displaystyle\liminf_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e dire se esiste il limite* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^2y + (xy)^n}{x^2+y^2} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

dove $n \ge 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*

Osservazioni su Es. 9 (Lagrange):

(1) Per trovare il massimo ed il minimo di F in $\overline{B}_1$, bisogna innanzitutto trovare i punti critici $A_1, A_2, \dots$ in B_1 (ovvero all'interno), che sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \nabla F(X) = 0 \\ |X| < 1 \end{cases}$$

Una volta trovati i punti critici in B_1, non è necessario (anche se non è sbagliato) studiare la matrice hessiana di F.
Inoltre, ricordiamo che se la matrice hessiana di F è definita positiva in uno dei punti critici, allora questo è soltanto un punto di

$$\boxed{\text{MINIMO RELATIVO}},$$

non di minimo assoluto in B_1.

(2) Una volta che avete studiato i punti critici all'interno, bisogna trovare i punti critici sul bordo ∂B_1, ovvero le soluzioni del sistema

$$(L) \quad \begin{cases} \nabla F = \lambda \nabla G \\ G(x,y,z) = 1 \end{cases}$$

dove $G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

Osserviamo che:

- IL SISTEMA (L) HA SEMPRE SOLUZIONE.

(Infatti, ∂B_1 è compatto ed F è continua, e quindi ha uno (o più) punti di massimo ed uno (o più) punti di minimo su ∂B_1. Per il teorema di Lagrange, questi sono soluzioni di (L)).

- Se risolvendo il sistema (L), avete già trovato i valori di x, y e z, non è necessario cercare anche λ.

In dimensione 3, il determinante e la traccia non bastano per dire se una matrice è definita positiva, negativa oppure indefinita. Bisogna invece usare il seguente criterio generale:

Una matrice $n \times n$ è:

- <u>definita positiva</u> se tutti gli autovalori sono positivi;
- <u>semi-definita positiva</u>, se gli autovalori sono ≥ 0
- <u>definita negativa</u>, se tutti gli autovalori sono < 0
- <u>semi-definita negativa</u>, se gli autovalori son ≤ 0
- <u>indefinita</u>, se alcuni autovalori sono > 0, mentre altri sono < 0.

$$\alpha = (e^x - 2y)\,dx + (xy + \cos y)\,dy$$

$$D = \{(x,y) : \underbrace{0 \le y \le 1 - x^2}\} \Rightarrow x \in [-1,1]$$

$$\int_{(\partial D)_+} \alpha = \int_{(\partial D)_+} \Big(\underbrace{\cancel{e^x dx}}_{\text{esatta}} - 2y\,dx + xy\,dy + \underbrace{\cancel{\cos y\,dy}}_{\text{esatta}} \Big)$$

$$= \int_{(\partial D)_+} \left(-2y\,dx + xy\,dy\right)$$

(Stokes)

$$= \int_D d\left(-2y\,dx + xy\,dy\right)$$

$$= \int_D -2\,dy \wedge dx + y\,dx \wedge dy$$

$$= \int_D (2+y)\,dx \wedge dy$$

$$= \int_D (2+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{1-x^2} dy\,(2+y)$$

$$= \int_{-1}^{1} \Big[2(\underbrace{1-x^2}_{-2x^2}) + \frac{1}{2} \underbrace{(1-x^2)^2}_{-2x^2} \Big] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{5}{2} - 3x^2 + \frac{1}{2} x^4 \right) dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} \left(\frac{5}{2} - \underbrace{3x^2} + \frac{1}{2} x^4 \right) dx$$

$$= 2\left(\frac{5}{2} - 1 + \frac{1}{10} \right)$$

$$= 3 + \frac{1}{5} = \frac{16}{5}$$

---

③ <u>Taylor</u>: $\dfrac{\cos(2x)}{1-x+y}$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2)$$
$$= 1 - 2x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{1}{1-(x-y)} = 1 + (x-y) + (x-y)^2 + o(|x-y|^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(2x)}{1-(x-y)} = (1-2x^2)\left(1 + x - y + (x-y)^2\right) + o(x^2+y^2)$$

$$= 1 + x - y - x^2 - 2xy + y^2 + o(x^2+y^2).$$

(9) (sul bordo)

$$F(x,y,z) = x^2 - x + 2y^2 + z^2\,,$$

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2 \le 1\Big\}.$$

__Lagrange:__
$$\begin{cases} \nabla F(x,y,z) = \lambda \nabla G(x,y,z) \\ G(x,y,z) = 1 \end{cases}$$

$$G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

$$\begin{cases} 2x-1 = \lambda \cdot 2x \\ 4y = \lambda \cdot 2y \\ 2z = \lambda \cdot 2z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-1 = 2\lambda x \\ y(2-\lambda) = 0 \\ z\,\underline{(1-\lambda)} = 0 \\ \underbrace{x^2+y^2+z^2=1}. \end{cases}$$

(1) $z(1-\lambda)=0 \quad \begin{matrix} \nearrow z=0 \\ \searrow z\neq 0 \end{matrix}$

Se $z \neq 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow y=0$ e $-1=0$. $\mathcal{E}$

$\Rightarrow \boxed{z=0}$

(2) $y(2-\lambda)=0 \quad \begin{matrix} \nearrow y=0 \\ \searrow y\neq 0 \Rightarrow \lambda = 2 \end{matrix}$

Se $y=0 \Rightarrow$ le soluzioni sono $(x,y,z)=(\pm 1,0,0)$.

$$F(1,0,0) = 0$$
$$F(-1,0,0) = 2$$

Se invece $y \neq 0$. Allora $\lambda = 2$

e quindi

$$2x-1 = 2\lambda x$$

$$\Rightarrow 2x-1 = 4x$$

$$\Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Se $x = -\frac{1}{2}$, $z=0$, allora $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$F\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$$

$$\parallel$$

$$F\left(-\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

I candidati su ∂D sono:

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) & \text{dove } F = \frac{9}{4} \\ (1, 0, 0) & \text{dove } F = 0 \\ (-1, 0, 0) & \text{dove } F = 2 \end{cases}$$

2

$$\iint_{B_{\sqrt{\pi}}} \operatorname{div} F(x,y) = \ ?$$

dove

$$F(x,y) = \left(x\cos(x^2+y^2),\ (x+2y)\sin(x^2+y^2) \right).$$

Su $\partial B_{\sqrt{\pi}}$, $x^2+y^2=\pi \Rightarrow \begin{cases} \cos\pi = -1 \\ \sin\pi = 0 \end{cases}$.

Consideriamo il campo

$$G(x,y) = (-x, 0).$$

Si ha che

$$\boxed{F \equiv G \text{ su } \partial B_{\sqrt{\pi}}}.$$

Per il teorema della divergenza

$$\iint_{B_{\sqrt{\pi}}} \operatorname{div} F \, dx\,dy = \oint_{\partial B_{\sqrt{\pi}}} F\cdot\nu$$

$$= \oint_{\partial B_{\sqrt{\pi}}} G\cdot\nu = \iint_{B_{\sqrt{\pi}}} \operatorname{div} G(x,y)\, dx\,dy$$

$$\operatorname{div} G(x,y) = -1.$$

Quindi $\displaystyle\iint_{B_{\sqrt{\pi}}} \operatorname{div} F = -|B_{\sqrt{\pi}}| \overset{\text{con } R=\sqrt{\pi}}{=} -\pi R^2 = -\pi^2.$

5 $\frac{2\cos(xy) - \cos(x+y)}{1-y} = F$

$$2\cos(xy) - \cos(x+y)$$
$$= 2 - \left(1 - \frac{1}{2}(x+y)^2\right) + o(x^2+y^2)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}(x+y)^2 + o(x^2+y^2)$$

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + o(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \left(1 + \frac{1}{2}(x+y)^2\right)\left(1 + y + y^2\right) + o(x^2+y^2)$$
$$= 1 + y + \frac{1}{2}(x+y)^2 + y^2 + o(x^2+y^2)$$

$$D^2F(x,y) = D^2\left[\frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{3}{2}y^2\right]$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$