Complementi di Analisi Matematica **a.a.** 2021-2022

Prova scritta – 3/6/2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

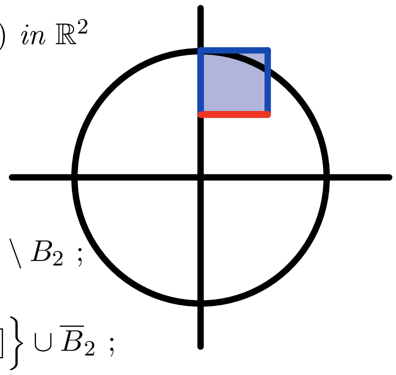
Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con* B_R *indichiamo la palla di raggio* $R > 0$ *e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$

$$B_R = \Big\{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 < R^2\Big\}.$$



Consideriamo gli insiemi

(A) $\Omega_A = \Big\{[0,1] \times (1,2]\Big\} \setminus \overline{B}_2$;

(B) $\Omega_B = \Big\{[0,1] \times (1,2]\Big\} \setminus B_2$;

(C) $\Omega_C = \Big\{[0,1] \times (1,2]\Big\} \cup \partial B_2$;

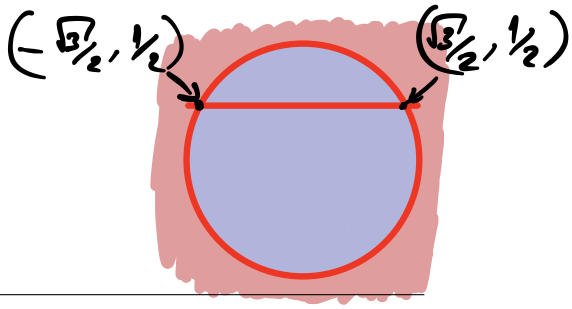
(D) $\Omega_D = \Big\{[0,1] \times (1,2]\Big\} \cup \overline{B}_2$;

(E) $\Omega_E = \Big\{[0,1] \times (1,2]\Big\} \cup B_2$;

(F) $\Omega_F = \Big\{[0,1] \times (1,2]\Big\} \cap \overline{B}_2$.

Gli insiemi seguenti sono **chiusi** *:* B, D

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*



$$D = B_1 \setminus \Big\{(x, 1/2) \ : \ -1 \le x \le 1\Big\}$$

$\partial D =$ $\partial B_1 \cup \left\{(x, \tfrac{1}{2}) : -\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{\cos(x-y)}{1-\sin(x+y)} = \left(1-\tfrac{1}{2}(x-y)^2\right)\left(1+(x+y)+(x+y)^2\right)+o(x^2y^2) = 1+x+y+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}y^2+3xy+o(x^2y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big((1+2t)e^{2t} - e^t \, , \ e^{4t} - (1+t)^2\Big)$ *e* $F(x,y) = (1+xy)e^x$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = \gamma'(0) \cdot DF(\gamma(0)) = (3,2)\cdot(1,0) = 3$$

$$\frac{(1-\sin(xy))e^x}{\cos y} = \frac{(1-xy)(1+x+\frac{x^2}{2})}{1-\frac{1}{2}y^2} + o(x^2+y^2) = 1+x+\frac{x^2}{2}-xy+\frac{y^2}{2}+o(x^2+y^2)$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione $F(x,y) = \dfrac{(1-\sin(xy))e^x}{\cos y}$ in $(0,0)$. Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *La matrice H è:* semidefinita positiva

---

Esercizio 6. *Sia $\alpha = (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}y^2)\,dx + (x + y\sin y)\,dy$ e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del dominio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y - y^2\}$ in senso antiorario.*

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \int_\Omega d\alpha = \int_0^1 dy \int_0^{y-y^2} (1+y)\,dx = \int_0^1 (1+y)(y-y^2)\,dy = \int_0^1 (y-y^3)\,dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big((x-3y)\cos(\pi(x^2+y^2))\,,\,(x+4y)\cos(2\pi(x^2+y^2))\Big)$.

Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R=1$, calcolare $\displaystyle\iint_{B_R} \operatorname{div}F(x,y)\,dx\,dy =$ 3π

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = (x^2 + xy)e^y.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare il massimo ed il minimo della funzione*

$$F(x,y,z) = x^2yz\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2 = 2\Big\}.$$

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy}{(1+x^2)(x^2+y^2)}\,.$$

Calcolare $\displaystyle\limsup_{|(x,y)|\to 0} F(x,y)$ *e* $\displaystyle\limsup_{|(x,y)|\to +\infty} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(x+y)^n x^2 y}{(x^2+y^2)^n} \quad se\ (x,y) \ne (0,0),$$

dove $n \ge 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n \ge 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = (x^2 + xy)e^y.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

$$\begin{cases} \partial_x F = (2x+y)e^y \\ \partial_y F = (x^2+xy+x)e^y \end{cases}$$

Punti critici: $\begin{cases} \partial_x F = 0 \\ \partial_y F = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y = 0 \\ x^2+xy+x = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = -2x \\ x - x^2 = 0 \end{cases} \iff$ $(x,y) = (0,0)$ oppure $(x,y) = (1,-2)$

Matrice hessiana

$$\partial_{xx} F = 2e^y$$

$$\partial_{xy} F = (2x+y)e^y + e^y = (2x+y+1)e^y$$

$$\partial_{yy} F = (x^2+xy+2x)e^y$$

1) $D^2F(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow D^2F(0,0)$ è indefinita

$\Rightarrow (0,0)$ è un punto di sella

2) $D^2F(1,-2) = \overbrace{e^{-2}}^{0<} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$

$\operatorname{tr} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 > 0$

$\Rightarrow$ $D^2F(1,-2)$ è definita positiva

$\Rightarrow$ $(1,-2)$ è un punto di minimo relativo.

Esercizio 9. *Trovare il massimo ed il minimo della funzione*

$$F(x,y,z) = x^2yz\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 2\Big\}.$$

$$\begin{cases} \partial_x F = 2xyz \\ \partial_y F = x^2 z \\ \partial_z F = x^2 y \end{cases}$$

Usando i moltiplicatori di Lagrange, abbiamo il sistema:

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_x F - \lambda 2x = 0 \\ \partial_y F - \lambda 2y = 0 \\ \partial_z F - \lambda 2z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xyz = 2\lambda x \\ x^2 z = 2\lambda y \\ x^2 y = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2yz = \lambda x^2 \\ x^2yz = 2\lambda y^2 \\ x^2yz = 2\lambda z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 2 \end{cases}$$

Se $x=0, y=0$ oppure $z=0$, abbiamo che $F(x,y,z)=0$. Quindi possiamo supporre che $x\neq 0, y\neq 0$ e $z\neq 0$ (e quindi anche $\lambda \neq 0$).

Siccome F cambia segno $\max F > 0$ e $\min F < 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2y^2 = 2z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 4y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ i candidati sono:

$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \max F = 1/2$$

$$\min F = -1/2$$

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy}{(1+x^2)(x^2+y^2)} \ .$$

Calcolare $\limsup_{|(x,y)|\to 0} F(x,y)$ *e* $\limsup_{|(x,y)|\to +\infty} F(x,y)$.

In coordinate polari abbiamo:

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+r^2\cos^2\theta}$$

$$\partial_\theta F(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$$

$$\iff (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(1+r^2\cos^2\theta) - \sin\theta\cos\theta(-r^2 \cdot 2\cos\theta\sin\theta) = 0$$

$$\iff \cos^2\theta - \sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = 0$$

$$\iff 2\cos^2\theta + r^2\cos^2\theta = 1$$

$$\iff \begin{cases} \cos^2\theta = \dfrac{1}{2+r^2} \\ \sin^2\theta = \dfrac{1+r^2}{2+r^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max_{0\le\theta\le 2\pi} F(r\cos\theta, r\sin\theta) =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{2+\tau^2}} \cdot \sqrt{\frac{1+\tau^2}{2+\tau^2}}}{1+\tau^2 \cdot \frac{1}{2+\tau^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\tau^2}}{(2+\tau^2)+\tau^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \limsup\limits_{|(x,y)| \to 0} F(x,y) = \lim\limits_{\tau \to 0} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} = \frac{1}{2} \\ \limsup\limits_{|(x,y)| \to +\infty} F(x,y) = \lim\limits_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} = 0. \end{cases}$$

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(x+y)^n x^2 y}{(x^2+y^2)^n} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

dove $n \geq 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x,0) - F(0,0)}{x} = 0$

$\Rightarrow$ la derivata parziale $\partial_x F(0,0)$ esiste ed è uguale a zero. Analogamente $\partial_y F(0,0) = 0$.

$\Rightarrow F$ è derivabile in 0 per ogni $n \geq 1$.

---

(2) In coordinate polari:

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^{3-n}(\cos\theta + \sin\theta)^n \cos^2\theta \sin\theta.$$

- Se $n = 1, 2$, allora

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = 0 = F(0,0).$$

Quindi per $n = 1, 2$, F è continua in $(0,0)$.

- Se $n = 3$, allora

$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) \neq \limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) \text{ non esiste}$$

$\Rightarrow F$ non è continua in $(0,0)$.

- Se $n > 3$, allora $\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = +\infty$, quindi F non è continua in $(0,0)$.

---

(3) F è differenziabile in zero se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y) - F(0,0) - (x,y)\cdot DF(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

In coordinate polari,

$$\frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = r^{2-n}(\cos\theta+\sin\theta)^n\cos^2\theta\sin\theta.$$

- Se $n=1$, allora
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$
e quindi F è diff. in $(0,0)$.

- Se $n=2$, allora
$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sup_\theta\left\{(\cos\theta+\sin\theta)^n\cos^2\theta\sin\theta\right\}$$
$$\neq$$
$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \inf_\theta\left\{(\cos\theta+\sin\theta)^n\cos^2\theta\sin\theta\right\}$$
$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ non esiste}$$
$\Rightarrow$ F non è diff. in $(0,0)$.

- Se $n \geq 3$, allora F non è continua in $(0,0)$ e quindi F non è nemmeno diff. in $(0,0)$.

<u>Conclusione:</u>

(1) F è sempre derivabile in $(0,0)$.

(2) F è continua in $(0,0)$ $\iff$ $n = 1,2$.

(3) F è differenziabile in $(0,0)$ $\iff$ $n = 1$.