Prova scritta – Dicembre 2021

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Matricola:

Regole generali

Per raggiungere la sufficienza, bisogna:

- Rispondere correttamente ad almeno **6 domande di Parte 1**.
- Raggiungere un punteggio globale (Parte 1 + Parte 2) di **18 punti su 30**.

Gli esercizi della Parte 2 saranno valutati solo se il candidato ha risposto correttamente ad almeno 6 delle domande della Parte 1.

Parte 1

(Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^2$.

$(A)\quad A = \Big\{(x,y)\ :\ x^2+3y^2 \le 1\Big\}$ $\qquad (B)\quad B = \Big\{(x,y)\ :\ x^2 \le y^2 \le x^2+1\Big\}$

$(C)\quad C = \Big\{(x,y)\ :\ x^2 \le y \le x\Big\}$ $\qquad (D)\quad D = \Big\{(x,y)\ :\ x^2+3y^2 \le 1\Big\} \setminus \Big\{(x,y)\ :\ x=0\Big\}$

$(E)\quad E = \Big\{(x,y)\ :\ x^2+3y^2 \le 1\Big\} \cap \Big\{(x,y)\ :\ x=0\Big\}$

Gli insiemi seguenti sono **compatti** :

Gli insiemi seguenti sono **chiusi ma non compatti** :

Esercizio 2. *Consideriamo le seguenti funzioni di due variabili.*

$(A)\quad A(x,y) = 2x^2 - y^2$ $\qquad (B)\quad B(x,y) = x^2+y^2+2xy$

$(C)\quad C(x,y) = x^4 - y^4$ $\qquad (D)\quad D(x,y) = xy$ $\qquad (E)\quad E(x,y) = x^2y^2$

Le seguenti funzioni hanno un **minimo relativo** in $(0,0)$:

Le seguenti funzioni hanno un **massimo relativo** in $(0,0)$:

Le seguenti funzioni hanno un **punto di sella** in $(0,0)$:

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in zero la funzione* $\dfrac{1}{1+(1+x)\sin y}$.

$$\frac{1}{1+(1+x)\sin y} =$$

Esercizio 4. *Calcolare la derivata* $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t))$*, dove:*

$$\gamma(t) = \Big(\cos(3t) - e^{2t}\,,\ \sin(4t+t^3)\Big) \qquad e \qquad F(x,y) = \sin(2x-y) + \sin(x+3y).$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. *Trovare tutti i punti critici della funzione* $F(x,y) = \dfrac{x^2+y}{1+y^2}$ *in* $\mathbb{R}^2$.

I punti critici sono:

Esercizio 6. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{x(x+y)}{1+y^3}$ *nel punto* $(0,0)$*. Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa o indefinita.*

$H =$ *La matrice H è:*

Esercizio 7. *Calcolare l'area dell'insieme* $\Omega = \Big\{(x,y)\ :\ 0 \le x^3 \le y \le x^2\Big\}$.

"Area di Ω"=

Esercizio 8. *Dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+1}\,,\ \frac{y-x}{x^2+y^2+1}\right),$$

calcolare l'integrale della divergenza di F sulla palla di raggio 1 e centro $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$.

$$\iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy =$$

Esercizio 9. *Per quali valori del parametro $c \in \mathbb{R}$ la forma* $\alpha = xy\,dx + \big(cx^2+y^2\big)\,dy$ *è chiusa ?*

$c =$

Parte 2

Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 10. *Per i valori di c trovati nell'esercizio precedente (Esercizio 9), calcolare l'integrale della forma α sulla curva*

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \ , \qquad \gamma(t) = \big(t^2,\ te^{2(t-1)}\big).$$

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^2 - 4xy + \frac{1}{3}y^3.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 12. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{\big(x^2+y^2\big)^{1/4} y}{y^2 + \sqrt{1+x^2+y^2}}$$

calcolare $\limsup\limits_{|(x,y)|\to\infty} F(x,y)$.

Esercizio 13. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^2(e^y - 1)}{x^2+y^2} \quad se\ (x,y) \neq (0,0).$$

(1) *Dire se F è derivabile in zero e calcolare, se esiste il gradiente $\nabla F(0,0) = (0,0)$.*

(2) *Dire se F è derivabile su $\mathbb{R}^2$ e determinare se le sue derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2$.*

(3) *Dire se F è differenziabile in zero.*

(4) *Dire se F è continua su $\mathbb{R}^2$.*

(5) *Calcolare, al variare del vettore $V = (a,b) \neq (0,0)$, la derivata direzionale*

$$\partial_V F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tV).$$
