Prova scritta – 13/9/2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con* $B_R(a,b)$ *indichiamo la palla di raggio* $R>0$ *e centro* (a,b) *in* $\mathbb{R}^2$

$$B_R(a,b)=\Big\{(x,y)\ :\ (x-a)^2+(y-b)^2<R^2\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

$(A)\quad \Omega_A=\overline{B}_2(0,0)\cap B_1(2,0)\ ;$ $\qquad(D)\quad \Omega_D=\overline{B}_2(0,0)\setminus B_1(2,0)\ ;$

$(B)\quad \Omega_B=\overline{B}_2(0,0)\cup B_1(2,0)\ ;$ $\qquad(E)\quad \Omega_E=\overline{B}_2(0,0)\cap \overline{B}_1(2,0)\ ;$

$(C)\quad \Omega_C=\overline{B}_2(0,0)\setminus \overline{B}_1(2,0)\ ;$ $\qquad(F)\quad \Omega_F=\overline{B}_2(0,0)\cup \overline{B}_1(2,0)\ .$

Gli insiemi seguenti sono **chiusi** *:*

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x>0,\ y\geq 0\Big\}\setminus\partial B_1(0,0)$$

$\partial D=$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{e^{x+xy}}{1+2y}=$$

Esercizio 4. *Siano* $\quad\gamma(t)=\Big((1-t)^3-1\,,\ (1+t)^2-1\Big)\quad$ *e* $\quad F(x,y)=e^{x+y}\Big(\sin(3x)+\sin(2y)\Big).$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}F(\gamma(t))=$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{\sqrt{1+5xy}}{\cos(2x)\,\cos y}$ *in* $(0,0)$. *Dire se* H *è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H =$ *La matrice* H *è:*

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (xe^x - y)\,dx + (xy^2 - ye^y)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *a tratti che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \big\{(x,y)\ : y \geq 0,\ 0 \leq x \leq y - y^3\big\}$ *in senso antiorario.*
Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(\frac{9x+2y}{(1+x^2+y^2)^4}\,,\,\frac{x-y}{(3+x^2+y^2)^2}\right)$.
Sulla palla B_R *di centro* $(0,0)$ *e raggio* $R=1$, *calcolare* $\displaystyle\iint_{B_R} \mathrm{div}F(x,y)\,dx\,dy =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^2y + y^3 - 3y + x^2.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F *in* $\mathbb{R}^2$ *e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

Esercizio 9. *Trovare il massimo della funzione*

$$F(x,y,z) = 2z - \sqrt{2-xy}\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2 \leq 2\Big\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{y\,\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2+y^2} \quad ,$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(x+y)^n x^{n+2} y^{n+3}}{(x^4+y^4)^n} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

dove $n \geq 1$ *è un numero intero.*

(1) *Per quali valori del parametro* $n \geq 1$ *la funzione è derivabile in* $(0,0)$.

(2) *Per quali valori del parametro* $n \geq 1$ *la funzione* F *è continua in* $(0,0)$.

(3) *Per quali valori del parametro* $n \geq 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$.
