
Prova scritta – 28/6/2022

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. Con B_R indichiamo la palla di raggio $R > 0$ e centro $(0, 0)$ in \mathbb{R}^2

$$B_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}.$$

Consideriamo gli insiemi

$$\begin{aligned} (A) \quad \Omega_A &= \{(-4, 4) \times [-1, 1]\} \cap \partial B_3; & (D) \quad \Omega_D &= \{(-4, 4) \times [-1, 1]\} \cap B_3; \\ (B) \quad \Omega_B &= \{(-4, 4) \times [-1, 1]\} \cup \partial B_3; & (E) \quad \Omega_E &= \{(-4, 4) \times [-1, 1]\} \cup \bar{B}_3; \\ (C) \quad \Omega_C &= \{(-4, 4) \times [-1, 1]\} \setminus B_3; & (F) \quad \Omega_F &= \{(-4, 4) \times [-1, 1]\} \cap \bar{B}_3. \end{aligned}$$

Gli insiemi seguenti sono **compatti** :

Esercizio 2. Trovare la frontiera dell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 - 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - x^4\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. Sviluppare fino al secondo ordine in $(0, 0)$ la funzione

$$\frac{\cos(x - y)}{2 - e^y} =$$

Esercizio 4. Siano $\gamma(t) = (\sin(3t - t^2) - t^2 \sin t, \sin(te^t))$ e $F(x, y) = (1 + xy)e^{x-2y}$.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. Calcolare la matrice hessiana H della funzione $F(x, y) = \frac{\cos(xy)e^{x+y}}{1 - \sin(x-y)}$ in $(0, 0)$. Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.

$H =$

La matrice H è:

Esercizio 6. Sia $\alpha = (x^2 + 2xy) dx + (y^2 + xy) dy$ e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del dominio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ in senso antiorario.

Calcolare $\int_{\gamma} \alpha =$

Esercizio 7. Consideriamo il campo $F(x, y) = ((x^3 - y)e^{x^2+y^2}, (y^3 + x^2)e^{x^2+y^2})$.

Sulla palla B_R di centro $(0, 0)$ e raggio $R = 1$, calcolare $\iint_{B_R} \operatorname{div} F(x, y) dx dy =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = x(y^2 + y)e^x.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in \mathbb{R}^2 e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. Trovare il massimo della funzione

$$F(x, y, z) = x + yz,$$

sull'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}.$$

Esercizio 10. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = \frac{y \sin(x^2 + y^2)}{(1 + y^2)(x^2 + y^2)}.$$

Calcolare $\limsup_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$ e $\limsup_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} F(x, y)$.

Esercizio 11. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$F(0, 0) = 0 \quad e \quad F(x, y) = \frac{x^2 y (x^n + y^n)}{(x^2 + y^2)^n} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0),$$

dove $n \geq 1$ è un numero intero.

- (1) Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione è derivabile in $(0, 0)$.
 - (2) Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è continua in $(0, 0)$.
 - (3) Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0, 0)$.
-