Prova scritta – Gennaio 2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Matricola:

Parte 1

(Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con* B_R *indichiamo la palla di raggio* $R > 0$ *e centro* $(0, 0)$ *in* $\mathbb{R}^2$

$$B_R = \Big\{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 < R^2\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

(A) $\Omega_A = \Big\{[0, 1] \times [0, 1]\Big\} \setminus B_1$; (B) $\Omega_B = \Big\{[0, 1] \times [0, 1]\Big\} \cap B_1$;

(C) $\Omega_C = \Big\{[0, 1] \times [0, 1]\Big\} \cup B_1$; (D) $\Omega_D = B_1 \setminus \Big\{[0, 1] \times [0, 1]\Big\}$;

(E) $\Omega_E = \Big\{(0, 1] \times (0, 1]\Big\} \cup B_1$; (F) $\Omega_F = B_1 \cap \Big\{(0, 1] \times (0, 1]\Big\}$.

Gli insiemi seguenti sono **aperti** :

Gli insiemi seguenti sono **chiusi** :

Esercizio 2. *Consideriamo le seguenti funzioni di due variabili.*

(A) $A(x, y) = xy$ (B) $B(x, y) = x(x + y)$

(C) $C(x, y) = x^2(x^2 + y^2)$ (D) $D(x, y) = xy(x^2 + y^2)$ (E) $E(x, y) = x^2 - y^2$

Le seguenti funzioni hanno un **minimo relativo** in $(0, 0)$:

Le seguenti funzioni hanno un **massimo relativo** in $(0, 0)$:

Le seguenti funzioni hanno un **punto di sella** in $(0, 0)$:

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in zero la funzione* $\dfrac{1}{1-x-\sin(xy)}$.

$$\frac{1}{1-x-\sin(xy)} =$$

Esercizio 4. *Calcolare la derivata* $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} F(\gamma(t))$, *dove:*

$$\gamma(t) = \left(e^{3t+t^2} - e^t\,,\ \sin(4t)\cos(2t)\right) \qquad e \qquad F(x,y) = (1+x-y)^2 + (1+xy)^3.$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. *Trovare tutti i punti critici della funzione* $F(x,y) = \dfrac{x-y^2}{1+x^2}$ *in* $\mathbb{R}^2$.

I punti critici sono:

Esercizio 6. *Calcolare la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{x(x-3y)}{1+xy}$ *nel punto* $(0,0)$. *Dire se* H *è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa o indefinita.*

$H =$ *La matrice* H *è:*

Esercizio 7. *Calcolare l'integrale della funzione* $F(x,y) = y$ *sull'insieme*

$$\Omega = B_1 \cap \Big\{(x,y) \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0\Big\}.$$

$$\iint_\Omega F(x,y)\,dx\,dy =$$

Esercizio 8. *Dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{3x}{x^2+y^2+2}\,,\,\frac{2x-y}{x^2+y^2+3}\right),$$

calcolare l'integrale della divergenza di F *sulla palla di raggio 1 e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$.

$$\iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy =$$

Esercizio 9. *Per quali valori del parametro* $c \in \mathbb{R}$ *la forma* $\alpha = (yx^2+x)\,dx + \big(cx^3+c^2y\big)\,dy$ *è chiusa ?*

$c =$

Parte 2

Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - 2xy + \frac{1}{3}y^3.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{\left(x^2+y^2\right)^{1/2} xy}{x^2 + y^2(x^2+y^2)}.$$

Calcolare $\limsup\limits_{|(x,y)|\to\infty} F(x,y)$ *e* $\liminf\limits_{|(x,y)|\to\infty} F(x,y)$ *e dire se esiste il limite* $\lim\limits_{|(x,y)|\to\infty} F(x,y)$.

Esercizio 12. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(x+xy)y^2}{x^2+y^2} \quad se\ (x,y) \neq (0,0).$$

(1) *Dire se F è derivabile in zero e calcolare, se esiste il gradiente $\nabla F(0,0) = (0,0)$.*

(2) *Dire se F è derivabile su $\mathbb{R}^2$ e determinare se le sue derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2$.*

(3) *Dire se F è differenziabile in zero.*

(4) *Dire se F è continua su $\mathbb{R}^2$.*

(5) *Calcolare, al variare del vettore $V = (a,b) \neq (0,0)$, la derivata direzionale*

$$\partial_V F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(tV).$$
