
Prova scritta – 2 Aprile 2022

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. Con B_R indichiamo la palla di raggio $R > 0$ e centro $(0, 0)$ in \mathbb{R}^2

$$B_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}.$$

Consideriamo gli insiemi

$$(A) \quad \Omega_A = B_1 \cup ([0, 2) \times [0, 2)) ; \quad (B) \quad \Omega_B = \overline{B}_1 \setminus ([0, 2) \times [0, 2)) ;$$

$$(C) \quad \Omega_C = \overline{B}_1 \cap ([0, 2) \times [0, 2)) ; \quad (D) \quad \Omega_D = \overline{B}_1 \cup ([0, 2) \times [0, 2)) ;$$

$$(E) \quad \Omega_E = B_1 \cap ([0, 2) \times [0, 2)) ; \quad (F) \quad \Omega_F = ([0, 2) \times [0, 2)) \setminus B_1 .$$

Gli insiemi seguenti sono **compatti** :

Esercizio 2. Trovare la frontiera dell'insieme

$$D = B_1 \cap \{(x, y) : x \geq 0\} \setminus \{(x, y) : y = 0\}$$

$$\partial D =$$

Esercizio 3. Sviluppare fino al secondo ordine in $(0, 0)$ la funzione $\frac{e^{\sin(y-x^2)}}{\cos(2x+y^2)}$.

$$\frac{e^{\sin(y+x^2)}}{\cos(2x-y^2)} =$$

Esercizio 4. Dati $\gamma(t) = (\sin(3t), \sqrt{1+4t} - \sqrt{1-3t})$ e $F(x, y) = \frac{e^y}{\sqrt{1-xy}}$, calcolare

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. Calcolare la matrice hessiana H di $F(x, y) = \frac{3 \cos(xy) - 2 \cos(x + y)}{1 - y}$ nel punto $(0, 0)$. Dire se H è definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa, semidefinita negativa, indefinita.

$H =$

La matrice H è:

Esercizio 6. Calcolare l'integrale della funzione $F(x, y) = \frac{1}{2+x^2+y^2}$ sulla palla B_1 .

$$\iint_{B_1} F(x, y) dx dy =$$

Esercizio 7. Siano $\alpha = (e^x - y^8) dx + (e^{-y} + 2x) dy$ e γ la curva semplice chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ in senso antiorario. Calcolare $\int_{\gamma} \alpha =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = x^3 + 3xy + y^3.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in \mathbb{R}^2 e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. Trovare i massimi ed i minimi della funzione

$$F(x, y, z) = x^2 - x + 2y^2 + z^2,$$

sull'insieme

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

Esercizio 10. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + \frac{4y^2}{x^2 + y^2}}.$$

Calcolare $\limsup_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$ e $\liminf_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$ e dire se esiste il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$.

Esercizio 11. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$F(0, 0) = 0 \quad e \quad F(x, y) = \frac{x^2 y + (xy)^n}{x^2 + y^2} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0),$$

dove $n \geq 1$ è un numero intero.

- (1) Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione è derivabile in $(0, 0)$.
- (2) Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è continua in $(0, 0)$.
- (3) Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0, 0)$.