Prova scritta – 2 Aprile 2022

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Con* B_R *indichiamo la palla di raggio* $R > 0$ *e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$

$$B_R = \Big\{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 < R^2\Big\}.$$

Consideriamo gli insiemi

(A) $\Omega_A = B_1 \cap \Big([0,2) \times [0,2)\Big)$; (B) $\Omega_B = \overline{B}_1 \cap \Big([0,2) \times [0,2)\Big)$;

(C) $\Omega_C = \overline{B}_1 \setminus \Big([0,2) \times [0,2)\Big)$; (D) $\Omega_D = \overline{B}_1 \cup \Big([0,2) \times [0,2)\Big)$;

(E) $\Omega_E = B_1 \cup \Big([0,2) \times [0,2)\Big)$; (F) $\Omega_F = \Big([0,2) \times [0,2)\Big) \setminus B_1$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti** *:*

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = B_1 \cap \Big\{(x,y) \ : \ y \geq 0\Big\} \setminus \Big\{(x,y) \ : \ x = 0\Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione* $\dfrac{e^{\sin(y+x^2)}}{\cos(2x-y^2)}$.

$$\frac{e^{\sin(y+x^2)}}{\cos(2x-y^2)} =$$

Esercizio 4. *Dati* $\gamma(t) = \Big(\sin(3t)\,,\ \sqrt{1+4t} - \sqrt{1-3t}\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+xy}}$ *, calcolare*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H di* $F(x,y)=\dfrac{2\cos(xy)-\cos(x+y)}{1-y}$ *nel punto* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa, semidefinita negativa, indefinita.*

$H=$ *La matrice H è:*

Esercizio 6. *Calcolare l'integrale della funzione* $F(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ *sulla palla* B_1.

$$\iint_{B_1} F(x,y)\,dx\,dy=$$

Esercizio 7. *Siano* $\alpha=(e^x-y^7)\,dx+(e^{-y}+x)\,dy$ *e γ la curva semplice chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del quadrato* $[0,1]\times[0,1]$ *in senso antiorario.* *Calcolare* $\int_\gamma \alpha=$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y)=x^3+3xy+y^3.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare i massimi ed i minimi della funzione*

$$F(x,y,z)=x^2-x+2y^2+z^2\,,$$

sull'insieme

$$D=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2\le 1\Big\}.$$

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2+\frac{4y^2}{x^2+y^2}}\ .$$

Calcolare $\limsup\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e* $\liminf\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e dire se esiste il limite* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione* $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definita come*

$$F(0,0)=0\qquad e\qquad F(x,y)=\frac{x^2y+(xy)^n}{x^2+y^2}\quad se\ (x,y)\neq(0,0),$$

dove $n\ge 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n\ge 1$ la funzione è derivabile in* $(0,0)$.

(2) *Per quali valori del parametro $n\ge 1$ la funzione F è continua in* $(0,0)$.

(3) *Per quali valori del parametro $n\ge 1$ la funzione F è differenziabile in* $(0,0)$.
