Liminf e limsup di funzioni definite su sopragrafici

Un metodo generale per il caclolo di liminf e limsup su sopragrafici

Sia
$$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
una funzione continua e sia Ω il sopragrafico di φ
$$\Omega:=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y>\varphi(x)\Big\}.$$
Definiamo inoltre il semispazio superiore
$$H:=\Big\{(x,z)\in\mathbb{R}^2\ :\ z>0\Big\}.$$
Data una funzione
$$F:\Omega\to\mathbb{R},$$
definiamo la funzione
$$G:H\to\mathbb{R}\ ,\qquad G(x,z)=F\big(x,z+\varphi(x)\big).$$
Osserviamo che:

- se (x_n,z_n) è una successione di punti in H tale che $\big|(x_n,z_n)\big|\to+\infty$, allora
$$(x_n,y_n):=\big(x_n,z_n+\varphi(x_n)\big)$$
è una successione di punti in Ω tale che $\big|(x_n,z_n)\big|\to+\infty$. In particolare, questo implica che
$$\lim_{n\to\infty}G(x_n,z_n)=\lim_{n\to\infty}F(x_n,y_n)\quad\le\limsup_{\substack{|(x,y)|\to+\infty\\(x,y)\in\Omega}}F(x,y),$$
e quindi prendendo il sup su tutte le successioni divergenti (x_n,z_n) in H, otteniamo
$$\limsup_{\substack{|(x,z)|\to+\infty\\(x,z)\in H}}G(x,z)\quad\le\limsup_{\substack{|(x,y)|\to+\infty\\(x,y)\in\Omega}}F(x,y).$$

- Viceversa, se (x_n,y_n) è una successione di punti in Ω tale che $\big|(x_n,y_n)\big|\to+\infty$, allora
$$(x_n,z_n):=\big(x_n,y_n-\varphi(x_n)\big)$$
è una successione di punti in H tale che $\big|(x_n,z_n)\big|\to+\infty$. In particolare, questo implica che
$$\lim_{n\to\infty}F(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}G(x_n,z_n)\quad\le\limsup_{\substack{|(x,z)|\to+\infty\\(x,z)\in H}}G(x,z),$$
e quindi prendendo il sup su tutte le successioni divergenti (x_n,y_n) in Ω, otteniamo
$$\limsup_{\substack{|(x,y)|\to+\infty\\(x,y)\in\Omega}}F(x,y)\quad\le\limsup_{\substack{|(x,z)|\to+\infty\\(x,z)\in H}}G(x,z).$$

In conclusione, abbiamo che
$$\limsup_{\substack{|(x,y)|\to+\infty\\(x,y)\in\Omega}}F(x,y)\quad=\quad\limsup_{\substack{|(x,z)|\to+\infty\\(x,z)\in H}}G(x,z).$$

Esempio di caclolo di liminf e limsup su un sopragrafico

Esempio 1. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y)=\frac{2y-x^2}{x+y}$$

definita su

$$\Omega:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y\ge x^2\}.$$

Calcolare

$$\limsup_{\substack{|(x,\,y)|\,\to\,+\infty\\ (x,\,y)\,\in\,\Omega}} F(x,y)\qquad e\qquad \liminf_{\substack{|(x,\,y)|\,\to\,+\infty\\ (x,\,y)\,\in\,\Omega}} F(x,y).$$

Soluzione. In questo caso $\varphi(x)=x^2$. Inoltre, indicheremo di nuovo con H il semipiano superiore

$$H:=\Big\{(x,z)\in\mathbb{R}^2\ :\ z>0\Big\}.$$

Sia

$$G:H\to\mathbb{R}$$

la funzione

$$G(x,z)=F(x,z+\varphi(x))=\frac{2(z+x^2)-x^2}{x+z+x^2}=\frac{2z+x^2}{x+z+x^2}.$$

In coordinate polari,

$$x=R\cos\theta\qquad z=R\sin\theta$$

consideriamo la funzione

$$G(R\cos\theta,R\sin\theta)=\frac{2\sin\theta+R\cos^2\theta}{\cos\theta+\sin\theta+R\cos^2\theta},$$

a raggio R fissato e per $\theta\in[0,\pi]$. Per trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$g(\theta)=\frac{2\sin\theta+R\cos^2\theta}{\cos\theta+\sin\theta+R\cos^2\theta}$$

sull'intervallo $[0,\pi]$, osserviamo che $g'(\theta)=0$ se e solo se

$$\begin{aligned}
0&=\Big(2\cos\theta-R2\sin\theta\cos\theta\Big)\Big(\cos\theta+\sin\theta+R\cos^2\theta\Big)\\
&\quad-\Big(2\sin\theta+R\cos^2\theta\Big)\Big(-\sin\theta+\cos\theta-R2\sin\theta\cos\theta\Big)\\
&=2+R\Big(2\cos^3\theta-2\sin^2\theta\cos\theta-2\sin\theta\cos^2\theta+4\sin^2\theta\cos\theta+\sin\theta\cos^2\theta-\cos^3\theta\Big)\\
&=2+R\Big(\cos^3\theta+2\sin^2\theta\cos\theta-\sin\theta\cos^2\theta\Big)\\
&=2+R\cos\theta\Big(\cos^2\theta+2\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta\Big)\\
&=2+R\cos\theta\Big(1+\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta\Big)\\
&=2+R\cos\theta\Big(2-\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta\Big)
\end{aligned}$$

Ora, siccome

$$0\le\cos^2\theta\le1\qquad\text{e}\qquad-\frac12\le\sin\theta\cos\theta\le\frac12\ ,$$

abbiamo che, per ogni $\theta\in[0,\pi]$,

$$\frac12\le2-\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta\le\frac52.$$

Di conseguenza, se θ_R è tale che

$$g'(\theta_R) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos(\theta_R) = -\frac{2}{R\Big(2 - \cos^2(\theta_R) - \sin(\theta_R)\cos(\theta_R)\Big)},$$

allora

$$-4\frac{1}{R} \leq \cos(\theta_R) \leq -\frac{4}{5}\frac{1}{R}.$$

Si ha quindi che

$$\cos(\theta_R) = O(1/R) \qquad \text{e} \qquad \sin(\theta_R) = 1 + O(1/R^2)\,.$$

Di conseguenza,

$$G\big(R\cos(\theta_R), R\sin(\theta_R)\big) = \frac{2\sin(\theta_R) + R\cos^2(\theta_R)}{\cos(\theta_R) + \sin(\theta_R) + R\cos^2(\theta_R)} = \frac{2 + O(1/R)}{1 + O(1/R)},$$

e quindi

$$\lim_{R\to\infty} G\big(R\cos(\theta_R), R\sin(\theta_R)\big) = 2.$$

Quando invece $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, abbiamo

$$G(R,0) = \frac{R}{R+1} \qquad \text{e} \qquad G(R,0) = \frac{R}{R-1}.$$

Si ha quindi che

$$\limsup_{\substack{|(x,z)| \to +\infty \\ (x,z) \in H}} G(x,z) = 2 \qquad \text{e} \qquad \liminf_{\substack{|(x,z)| \to +\infty \\ (x,z) \in H}} G(x,z) = 1.$$

In conclusione,

$$\limsup_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ (x,y) \in \Omega}} F(x,y) = 2 \qquad \text{e} \qquad \liminf_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ (x,y) \in \Omega}} F(x,y) = 1.$$

$\square$