Sugli sviluppi di Taylor, o-piccolo e O-grande

Definizione di o-piccolo e O-grande

Definizione 1. *Dati un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ contenente l'origine, una funzione $F : \Omega \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^M$ ed un numero naturale $n \geq 0$, diciamo che:*

- $F(X) = o(|X|^n)$, *se*
$$\lim_{X\to 0} \frac{F(X)}{|X|^n} = 0;$$
- $F(X) = O(|X|^n)$, *se esistono un raggio $r > 0$ ed una costante $C > 0$ tali che*
$$\frac{|F(X)|}{|X|^n} \leq C \quad \textit{per ogni} \quad X \in B_r \setminus \{0\}.$$

Osservazione 2. *Quando $n = 0$ si scrive semplicemente $F(X) = o(1)$ oppure $F(X) = O(1)$, dove:*

- $F(X) = o(1)$ *vuol dire che* $\lim_{X\to 0} F(X) = 0$;
- $F(X) = O(1)$ *vuol dire che esitono una costante $C > 0$ ed un raggio $r > 0$ tali che*
$$|F(X)| \leq C \quad \textit{per ogni} \quad X \in B_r \setminus \{0\}.$$

Osservazione 3. *Per dire che $F(X) = o(|X|^n)$ oppure $F(X) = O(|X|^n)$ non è necessario avere che F sia definita nell'origine, anche se nulla impedisce che lo sia, come accade in tanti esempi ed esercizi.*

Osservazione 4. *Se F è una funzione da $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in $\mathbb{R}$, allora sono equivalenti:*

(a) $F(x, y) = o(|(x, y)|^n)$;

(b) $F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = o(\rho^n)$.

Osservazione 5. *Se F è una funzione da $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in $\mathbb{R}$, allora sono equivalenti:*

(A) $F(x, y) = O(|(x, y)|^n)$;

(B) $F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = O(\rho^n)$.

Algebra degli O-grandi

Proposizione 6 (Proprietà di O-grande)**.** *Dati un aperto $\Omega \in \mathbb{R}^N$ contenente l'origine e due funzioni $F : \Omega \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^M$ e $G : \Omega \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^M$, abbiamo che:*

(a) *Se $F(X) = O(|X|^n)$ e $G(X) = O(|X|^n)$ per un qualche $n \geq 0$, allora*
$$F(X) + G(X) = O\big(|X|^n\big);$$

(b) *Se $F(X) = O(|X|^n)$ per un qualche $n \geq 0$ e $G(X) = O(|X|^m)$ per un qualche $m \geq 0$, allora*
$$F(X) \cdot G(X) = O\big(|X|^{n+m}\big);$$

(c) *Se* $\varphi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ *è una funzione tale che* $\varphi(Y) = O(|Y|^k)$ *per un qualche* $k \geq 0$ *e se* $F(X) = O(|X|^n)$ *per un qualche* $n \geq 1$*, allora*

$$\varphi\big(F(X)\big) = O\big(|X|^{nk}\big);$$

(d) *Se* $F(X) = O(|X|^n)$ *per un qualche* $n \geq 0$*, allora*

$$F(X) = O(|X|^k) \quad \textit{per ogni} \quad 0 \leq k \leq n.$$

Dimostrazione. (a) Esistono costanti C_1 e C_2 e due raggi r_1 e r_2 tali che

$$|F(X)| \leq C_1|X|^n \quad \text{per ogni} \quad X \in B_{r_1} \setminus \{0\};$$

$$|G(X)| \leq C_2|X|^n \quad \text{per ogni} \quad X \in B_{r_2} \setminus \{0\}.$$

Definiamo

$$r = \min\{r_1, r_2\}.$$

Allora,

$$|F(X) + G(X)| \leq |F(X)| + |G(X)| \leq (C_1 + C_2)|X|^n \quad \text{per ogni} \quad X \in B_r \setminus \{0\}.$$

Questo dimostra (a).

(b) Come sopra, esistono costanti C_1 e C_2 e due raggi r_1 e r_2 tali che

$$|F(X)| \leq C_1|X|^n \quad \text{per ogni} \quad X \in B_{r_1} \setminus \{0\};$$

$$|G(X)| \leq C_2|X|^m \quad \text{per ogni} \quad X \in B_{r_2} \setminus \{0\}.$$

Prendendo $r = \min\{r_1, r_2\}$, otteniamo

$$|F(X) \cdot G(X)| \leq |F(X)||G(X)| \leq C_1C_2|X|^{nm} \quad \text{per ogni} \quad X \in B_r \setminus \{0\}.$$

(c) Per mostrare (c), osserviamo che per ipotesi esistono C_φ e $\rho > 0$ tali che

$$|\varphi(Y)| \leq C_\varphi|Y|^k \quad \text{per ogni} \quad Y \in B_\rho \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^M.$$

Inoltre, come sopra, esistono r_1 e C_1 tali che

$$|F(X)| \leq C_1|X|^n \quad \text{per ogni} \quad X \in B_{r_1} \setminus \{0\}.$$

Siccome $n \geq 1$ possiamo trovare R_1 abbastanza piccolo tale che

$$C_1R_1^n \leq \rho.$$

Prendedo $r = \min\{r_1, R_1\}$, abbiamo che

$$|F(X)| \leq C_1|X|^n \leq C_1R_1^n \leq \rho \quad \text{per ogni} \quad X \in B_r \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^N.$$

Di conseguenza,

$$|\varphi(F(X))| \leq C_\varphi|F(X)|^k \leq C_\varphi\big(C_1|X|^n\big)^k = C_\varphi C_1^k|X|^{nk} \quad \text{per ogni} \quad X \in B_r \setminus \{0\}.$$

(d) Sappiamo che esistono r_1 e C_1 tali che

$$|F(X)| \leq C_1|X|^n \quad \text{per ogni} \quad X \in B_{r_1} \setminus \{0\}.$$

Di conseguenza,

$$|F(X)| \leq C_1|X|^n \leq C_1r_1^{n-k}|X|^k \quad \text{per ogni} \quad X \in B_{r_1} \setminus \{0\},$$

ovvero $F(X) = O(|X|^k)$. $\square$

Osservazione 7. *Possiamo sintetizzare la proposizione precedente come:*

- **Somma.** $O(|X|^n) + O(|X|^n) = O(|X|^n)$ *per ogni* $n \geq 0$*;*
- **Prodotto.** $O(|X|^n) \cdot O(|X|^m) = O(|X|^{n+m})$ *per ogni* $n, m \geq 0$*;*
- **Composizione.** $O(x^k) \circ O(|X|^n) = O(|X|^{nk})$ *per ogni* $k \geq 0$ *e* $n \geq 1$*;*
- $O(|X|^n) = O(|X|^k)$ *per ogni* $k \leq n$*.*

Algebra degli o-piccoli

Proposizione 8 (Proprietà di o-piccolo)**.** *Dati un aperto* $\Omega \in \mathbb{R}^N$ *contenente l'origine e due funzioni* $F : \Omega \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^M$ *e* $G : \Omega \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^M$*, abbiamo che:*

(a) *Se* $F(X) = o(|X|^n)$ *e* $G(X) = o(|X|^n)$ *per un qualche* $n \geq 0$*, allora*

$$F(X) + G(X) = o\big(|X|^n\big);$$

(b) *Se* $F(X) = o(|X|^n)$ *per un qualche* $n \geq 0$ *e* $G(X) = o(|X|^m)$ *per un qualche* $m \geq 0$*, allora*

$$F(X) \cdot G(X) = o\big(|X|^{n+m}\big);$$

(c) *Se* $\varphi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ *è una funzione tale che* $\varphi(0) = 0$ *e* $\varphi(Y) = o(|Y|^k)$ *per un qualche* $k \geq 0$ *e se* $F(X) = o(|X|^n)$ *per un qualche* $n \geq 0$*, allora*

$$\varphi\big(F(X)\big) = o\big(|X|^{nk}\big);$$

(d) *Se* $F(X) = o(|X|^n)$ *per un qualche* $n \geq 0$*, allora*

$$F(X) = o(|X|^k) \quad \textit{per ogni} \quad 0 \leq k \leq n.$$

Dimostrazione. (a) Abbiamo che

$$\lim_{X \to 0} \frac{F(X)}{|X|^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{X \to 0} \frac{G(X)}{|X|^n} = 0.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{X \to 0} \frac{F(X) + G(X)}{|X|^n} = 0.$$

(b) Per ipotesi,

$$\lim_{X \to 0} \frac{F(X)}{|X|^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{X \to 0} \frac{G(X)}{|X|^m} = 0.$$

Quindi

$$\lim_{X \to 0} \frac{|F(X) \cdot G(X)|}{|X|^{n+m}} \leq \lim_{X \to 0} \frac{|F(X)|}{|X|^n} \frac{|G(X)|}{|X|^m} = \lim_{X \to 0} \frac{|F(X)|}{|X|^n} \lim_{X \to 0} \frac{|G(X)|}{|X|^m} = 0.$$

(d) Dimostriamo ora il punto (d). Per $k \leq n$, abbiamo

$$\lim_{X \to 0} \frac{|F(X)|}{|X|^k} = \lim_{X \to 0} \frac{|F(X)|}{|X|^n} |X|^{n-k} = \lim_{X \to 0} \frac{|F(X)|}{|X|^n} \lim_{X \to 0} |X|^{n-k} = 0$$

(c) Sappiamo che

$$\lim_{X\to 0} \frac{F(X)}{|X|^n} = 0.$$

Per il punto (d), abbiamo

$$\lim_{X\to 0} F(X) = 0.$$

Di conseguenza, anche

$$\lim_{X\to 0} \frac{\varphi(F(X))}{|F(X)|^k} = 0$$

e quindi

$$\lim_{X\to 0} \frac{\varphi(F(X))}{|X|^{nk}} = \lim_{X\to 0} \frac{\varphi(F(X))}{|F(X)|^k} \left(\frac{|F(X)|}{|X|^n}\right)^k = \lim_{X\to 0} \frac{\varphi(F(X))}{|F(X)|^k} \lim_{X\to 0} \left(\frac{|F(X)|}{|X|^n}\right)^k = 0. \qquad \square$$

Osservazione 9. *Possiamo risrivere la proposizione precedente come segue:*

- $o(|X|^n) + o(|X|^n) = o(|X|^n)$ *per ogni* $n \geq 0$*;*
- $o(|X|^n) \cdot o(|X|^m) = o(|X|^{n+m})$ *per ogni* $n, m \geq 0$*;*
- $o(x^k) \circ o(|X|^n) = o(|X|^{kn})$ *per ogni* $n \geq 0$ *e* $k \geq 0$*;*
- $o(|X|^n) = o(|X|^k)$ *per ogni* $k \leq n$*.*

Relazioni fra o-piccolo e O-grande

Proposizione 10. *Dati un aperto* $\Omega \in \mathbb{R}^N$ *contenente l'origine e una funzione* $F : \Omega \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^M$*, abbiamo che:*

(a) *se* $F(X) = o(|X|^n)$ *per un qualche* $n \geq 0$*, allora* $F(X) = O(|X|^n)$*;*

(b) *se* $F(X) = O(|X|^n)$ *per un qualche* $n \geq 1$*, allora* $F(X) = o(|X|^{n-1})$*;*

(c) *se* $\varphi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ *è una funzione tale che*

$$\varphi(0) = 0 \quad e \quad \varphi(Y) = o(|Y|^k) \quad \textit{per un qualche} \quad k \geq 0,$$

e se

$$F(0) = 0 \quad e \quad F(X) = O(|X|^n) \quad \textit{per un qualche} \quad n \geq 1,$$

allora

$$\varphi\big(F(X)\big) = o\big(|X|^{nk}\big).$$

Dimostrazione. (a) Siccome

$$\lim_{X\to 0} \frac{F(X)}{|X|^n} = 0,$$

sappiamo che per ogni fissato $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che

$$|F(X)| \leq \varepsilon |X|^n \quad \text{per ogni} \quad X \in B_\varepsilon \setminus \{0\}.$$

(b) Per ipotesi, esistono $C > 0$ e $r > 0$ tali che

$$|F(X)| \leq C|X|^n \quad \text{per ogni} \quad X \in B_r \setminus \{0\}.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{X\to 0} \frac{|F(X)|}{|X|^{n-1}} \leq \lim_{X\to 0} \frac{C|X|^n}{|X|^{n-1}} = 0.$$

(c) Sappiamo che esistono C_1 e r_1 tali che

$$|F(X)| \leq C_1|X|^n \quad \text{per ogni} \quad X \in B_{r_1}.$$

Inoltre, siccome $n \geq 1$,

$$\lim_{X\to 0} F(X) = 0.$$

Di conseguenza, anche

$$\lim_{X\to 0} \frac{\varphi(F(X))}{|F(X)|^k} = 0$$

e quindi

$$\lim_{X\to 0} \frac{|\varphi(F(X))|}{|X|^{nk}} = \lim_{X\to 0} \frac{|\varphi(F(X))|}{|F(X)|^k} \left(\frac{|F(X)|}{|X|^n}\right)^k = 0. \qquad \square$$

Osservazione 11. *Possiamo risrivere la proposizione precedente come segue:*

- $o(|X|^n) = O(|X|^n)$ *per ogni* $n \geq 0$*;*
- $O(|X|^n) = o(|X|^{n-1})$ *per ogni* $n \geq 1$*;*
- $o(x^k) \circ O(|X|^n) = o(|X|^{kn})$ *per ogni* $k \geq 0$ *ed ogni* $n \geq 1$.

Applicazioni ed esempi

Esempio 12. $x = O(\sqrt{x^2+y^2})$ *e* $y = O(\sqrt{x^2+y^2})$.

Esempio 13. *Dati due interi* $n, m \in \mathbb{N}$, $x^n y^m = O\big(|(x,y)|^{n+m}\big)$.

Esempio 14. *Se* $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *e se* $F(X) = O(|X|^n)$ *e se* G *è una funzione limitata (per esempio, una costante), allora*

$$F(X)G(X) = O(|X|^n).$$

Esempio 15. *Se* P *è un polinomio* n*-omogeneo, per esempio* $P(x,y) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j} y^j$ *, allora*

$$P(x,y) = O\Big(\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^n\Big).$$

Esempio 16. *Se* P *è un polinomio tale che* $P(0) = 0$, *allora*

$$P(x,y) = O\big(\sqrt{x^2+y^2}\big).$$

Esempio 17.

- $x^2 y = O(|(x,y)|^3)$*;*
- $x^4\sqrt{x^2+y^2} = O(|(x,y)|^5)$*;*
- $\dfrac{x^4}{\sqrt{x^2+y^2}} = O(|(x,y)|^2)$*;*
- $\sqrt{x^4+y^2} = O(|(x,y)|)$*;*
- $x^4 y\sqrt{x^2+y^6} = O(|(x,y)|^6)$*;*
- $x^2 + y^4 + 3xy^5 = O(|(x,y)|^2)$*;*
- $x^5 + 3x^2y^2 + y^3 = O(|(x,y)|^3)$*;*

Esempio 18.
- $o(xy) = o(|(x,y)|^2)$;
- $o(xy^2) = o(|(x,y)|^3)$;
- $o(x+y) = o(|(x,y)|)$;
- $o(x+y^2) = o(|(x,y)|)$;
- $o(x^2y^2 + x^3) = o(|(x,y)|^3)$;
- $o(\sin x) = o(x) = o(|(x,y)|)$.
- $o(\sin(xy)) = o(xy) = o(|(x,y)|^2)$.

Esercizio 19. *Sviluppare la funzione* $\sin(xy)$ *fino al quarto ordine in zero.*

Soluzione. Abbiamo che
$$\sin t = t + o(t^2)$$
Sostituendo con $t = xy$ otteniamo
$$\sin(xy) = xy + o((xy)^2) = xy + o\big(|(x,y)|^4\big).$$
□

Esercizio 20. *Sviluppare la funzione* $\sin(x+y^2)$ *fino al quarto ordine in zero.*

Soluzione. Abbiamo che
$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4).$$
Sostituendo con $t = x + y^2$ abbiamo
$$\begin{aligned}\sin(x+y^2) &= x + y^2 - \frac{1}{6}(x+y^2)^3 + o\big((x+y^2)^4\big)\\ &= x + y^2 - \frac{1}{6}(x+y^2)^3 + o\big(|(x,y)|^4\big)\\ &= x + y^2 - \frac{1}{6}(x^3 + 3x^2y^2 + 3x^4y + y^6) + o\big(|(x,y)|^4\big)\\ &= x + y^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + o\big(|(x,y)|^4\big).\end{aligned}$$
□

Esercizio 21. *Sviluppare la funzione* e^{x-xy} *fino al terzo ordine in zero.*

Soluzione. Abbiamo che
$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3).$$
Sostituendo con $t = x - xy$ abbiamo
$$\begin{aligned}e^{x-xy} &= 1 + (x-xy) + \frac{1}{2}(x-xy)^2 + \frac{1}{6}(x-xy)^3 + o\big((x+y^2)^3\big)\\ &= 1 + (x-xy) + \frac{1}{2}(x-xy)^2 + \frac{1}{6}(x-xy)^3 + o\big(|(x,y)|^3\big)\\ &= 1 + x - xy + \frac{1}{2}(x^2 - 2x^2y + x^2y^2) + \frac{1}{6}x^3 + o\big(|(x,y)|^3\big)\\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{6}x^3 - x^2y + o\big(|(x,y)|^3\big).\end{aligned}$$
□

Esercizio 22. *Sviluppare la funzione di due variabili* $\dfrac{e^x}{1-\sin y}$ *fino al secondo ordine in zero.*

Soluzione. Abbiamo che

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(|(x,y)|^2). \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\sin y} &= 1 + \sin y + (\sin y)^2 + o(\sin^2 y) \\ &= 1 + \sin y + (\sin y)^2 + o(|(x,y)|^2) \\ &= 1 + y + o(y^2) + (y + o(y^2))^2 + o(|(x,y)|^2) \\ &= 1 + y + y^2 + o(y^2) + o(|(x,y)|^2) \\ &= 1 + y + y^2 + o(|(x,y)|^2). \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{1-\sin y} &= \Big(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(|(x,y)|^2)\Big)\Big(1 + y + y^2 + o(|(x,y)|^2)\Big) \\ &= \Big(1 + x + \frac{1}{2}x^2\Big)\Big(1 + y + y^2\Big) + o(|(x,y)|^2) \\ &= 1 + x + y + xy + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + o(|(x,y)|^2). \end{aligned}$$

□

Esercizio 23. *Sviluppare la funzione di due variabili* $\dfrac{e^{\sin x}}{1+xy}$ *fino al secondo ordine in zero.*

Soluzione. Abbiamo che

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{1}{2}(\sin x)^2 + o(\sin^2 x) \\ &= 1 + (x + o(x^2)) + \frac{1}{2}(x + o(x^2))^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(|(x,y)|^2). \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+xy} &= 1 - xy + o(xy) \\ &= 1 - xy + o(|(x,y)|^2). \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \frac{e^{\sin x}}{1+xy} &= \Big(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(|(x,y)|^2)\Big)\Big(1 - xy + o(|(x,y)|^2)\Big) \\ &= \Big(1 + x + \frac{1}{2}x^2\Big)\Big(1 - xy\Big) + o(|(x,y)|^2) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - xy + o(|(x,y)|^2). \end{aligned}$$

□

Esercizio 24. *Sviluppare fino al secondo ordine in zero le seguenti funzioni di due variabili:*

(1) $\dfrac{e^{\sin y}}{\cos(xy)}$; $\dfrac{\cos(x-y)}{e^{x+y}}$; $\dfrac{\sin x}{e^{xy}}$; $\dfrac{e^{y+x^2}}{1+\sin(xy)}$; $\dfrac{\cos(2x+y)}{1+x}$;

(2) $(1+y)\ln(1+x)$; $\ln(1+x+xy)$; $\ln(x+\cos y)$; $\ln(e^y+\sin x)$; $\dfrac{\ln(1+x)}{1+y}$;

(3) $\sqrt{1-xy}$; $\sqrt{1+x+2y}$; $\sqrt{y+\cos x}$; $(1-xy)\sqrt{1+x^2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{1+x-xy}}$.

Esercizio 25. *Sviluppare fino al secondo ordine in zero le seguenti funzioni di tre variabili:*

$\dfrac{1+\sin xy}{1+z}$; $\dfrac{\cos(z-y)}{e^{y-x}}$; $\dfrac{\sin z}{e^{xy}}$; $\dfrac{1+xy}{\sqrt{1+z-zy}}$.

Complementi. Una proposizione generale sugli sviluppi delle funzioni composte

Per completezza, riportiamo qui sotto una proposizione generale sugli sviluppi di Taylor delle funzioni composte.

Proposizione 26. *Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\varphi(0) = 0$ e*

$$\varphi(t) = P(t) + o(t^K),$$

dove P è un polinomio di grado $K \geq 0$. Sia $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$F(X) = Q(X) + o(|X|^N),$$

dove Q è un polinomio di grado $N \geq 1$ che si può scrivere come somma di polinomi omogenei nel modo seguente:

$$Q(X) = \sum_{j=n}^{N} Q_j(X),$$

dove ogni Q_j è j-omogeneo e dove $n \geq 1$. Allora

$$\varphi(F(X)) = P(Q(X)) + o(|X|^m),$$

dove m è il minimo tra N e nK.

Osservazione 27. *Osserviamo che se F è un polinomio, ovvero $F = Q$, allora abbiamo*

$$\varphi(F(X)) = \varphi(Q(X)) = P(Q(X)) + o(|X|^{nK}). \tag{1}$$

Dimostrazione di Proposizione 26. Osseviamo che possiamo scrivere φ ed F usando le funzioni ε ed E definite come:

$$\varphi(t) = P(t) + \varepsilon(t), \quad \text{dove} \quad \varepsilon(t) = o(t^K),$$
$$F(X) = Q(X) + E(X), \quad \text{dove} \quad E(X) = o(|X|^N).$$

Siccome $Q = \sum_{j=n}^{N} Q_j$ e $n \geq 1$, abbiamo che

$$Q(X) = O(|X|^n).$$

Inoltre, siccome $N \geq n$, abbiamo che

$$E(X) = o(|X|^N) = O(|X|^N) = O(|X|^n).$$

Di conseguenza, anche

$$F(X) = O(|X|^n).$$

Ora, siccome $\varepsilon(t) = o(t^K)$ e $F(X) = O(|X|^n)$ con $n \geq 1$, abbiamo che

$$\varepsilon(F(X)) = o(|X|^{Kn}),$$

e quindi

$$\varphi(F(X)) = P(F(X)) + \varepsilon(F(X)) = P(F(X)) + o(|X|^{Kn}).$$

Infine, scrivendo P come

$$P(t) = \sum_{j=0}^{K} a_j t^j,$$

abbiamo

$$P(F(X)) = P(Q(X) + E(X)) = \sum_{j=0}^{K} a_j (Q + E)^j = \sum_{j=0}^{K} a_j Q(X)^j + o(|X|^N) = P(Q(X)) + o(|X|^N).$$

In conclusione,

$$\varphi(F(X)) = P(Q(X)) + o(|X|^N) + o(|X|^{Kn}),$$

il che conclude la dimostrazione. □