

## Insiemi numerabili

### DEFINIZIONE ED ESEMPI

**Definizione 1.** Diciamo che un insieme  $\mathcal{I}$  è numerabile, se esiste una funzione **surgettiva**

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{I}.$$

**Proposizione 2.**

- (1)  $\mathcal{N}$  è numerabile;
- (2) ogni sottoinsieme di un insieme numerabile è numerabile;
- (3)  $\mathcal{Z}$  è numerabile;
- (4) se  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{J}$  sono numerabili, allora il prodotto  $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$  è numerabile;
- (5)  $\mathbb{Q}$  è un insieme numerabile;
- (6)  $\mathbb{Q}^d$  è un insieme numerabile;
- (7) Sia  $\mathcal{I}$  l'insieme di tutte le palle  $B_r(X)$  in  $\mathbb{R}^d$  con centro  $X \in \mathbb{Q}^d$  e raggio  $r \in \mathbb{Q}$ . Allora  $\mathcal{I}$  è numerabile.

Il seguente teorema è una proprietà ben nota dei numeri reali.

**Teorema 3** (senza dimostrazione). L'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  non è numerabile.

### RICOPRIMENTI NUMERABILI

Il lemma seguente sarà utile nella sezione dedicata agli insiemi compatti per ricoprimenti.

**Lemma 4.** Sia  $\Omega$  un sottoinsieme (qualsiasi) di  $\mathbb{R}^d$  e sia  $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  un ricoprimento di  $\Omega$  con insiemi aperti  $A_i \subset \mathbb{R}^d$ , ovvero si ha

$$\Omega \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i.$$

Allora, esiste una successione di indici  $\{i_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tale che  $\{A_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  è un ricoprimento numerabile di  $\Omega$ .

*Dimostrazione.* Useremo il lemma seguente:

**Lemma 5.** Siano  $A$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^d$ .

Allora, per ogni punto  $X \in A$  esiste una palla  $B_r(Y)$  tale che:

- $Y \in \mathbb{Q}^d$  e  $r \in \mathbb{Q}$ ;
- $X \in B_r(Y)$ ;
- $B_r(Y) \subset A$ .

Infatti, come conseguenza di questo lemma, possiamo trovare una successione di palle  $\{B_{r_k}(Y_k)\}_k$  tale che:

- $Y_k \in \mathbb{Q}^d$  e  $r_k \in \mathbb{Q}$ ;

- $\{B_{r_k}(Y_k)\}_k$  è un ricoprimento di  $\Omega$ ;
- ogni palla  $B_{r_k}(Y_k)$  è contenuta in un qualche insieme  $A_i$  ( $i \in \mathcal{I}$ ) del ricoprimento di partenza.

Ora, per ogni  $k \in \mathbb{N}$  selezioniamo un indice  $i_k$  tale che

$$B_{r_k}(Y_k) \subset A_{i_k}.$$

Quindi, per costruzione, abbiamo che

$$\Omega \subset \bigcup_{k \geq 1} B_{r_k}(Y_k) \subset \bigcup_{k \geq 1} A_{i_k},$$

ovvero anche  $A_{i_k}$  è un ricoprimento. □