

IL SOTTOGRAFICO DI UNA FUNZIONE CONTINUA È UN APERTO

Proposizione 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, il sottografico

$$\Omega := \{(x, y) : y < f(x)\}$$

è un insieme aperto in \mathbb{R}^2 .

Dimostrazione 1. Sia $X_0 = (x_0, y_0)$ un punto di Ω . Si ha quindi che

$$f(x_0) - y_0 > 0.$$

Definiamo ora

$$\varepsilon := \frac{f(x_0) - y_0}{2},$$

che ovviamente possiamo scrivere anche come

$$f(x_0) = y_0 + 2\varepsilon.$$

Siccome f è continua esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ma allora, per ogni (x, y) nel rettangolo

$$\mathcal{R} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$$

si ha

$$y < y_0 + \varepsilon = (f(x_0) - 2\varepsilon) + \varepsilon = f(x_0) - \varepsilon < f(x),$$

e quindi $\mathcal{R} \subset \Omega$. Infine, siccome il rettangolo \mathcal{R} contiene una palla di centro (x_0, y_0) e raggio $r = \min\{\varepsilon, \delta\}$, abbiamo che Ω è un aperto. □

Dimostrazione 2. Dimostreremo che l'insieme

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Omega := \{(x, y) : y \geq f(x)\}$$

è un chiuso (per successioni). Sia

$$X_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$$

una successione convergente ad un certo

$$X_\infty = (x_\infty, y_\infty) \in \mathbb{R}^2.$$

Per definizione, abbiamo che

$$f(x_n) \leq y_n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Siccome f è continua, abbiamo che

$$f(x_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_\infty,$$

e quindi $X_\infty = (x_\infty, y_\infty) \in \mathbb{R}^2$. □