Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Il sottografico di una funzione continua è un aperto

Proposizione 1. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, il sottografico*

$$\Omega := \Big\{ (x, y) \ : \ y < f(x) \Big\}$$

è un insieme aperto in $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione 1. Sia $X_0 = (x_0, y_0)$ un punto di Ω. Si ha quindi che

$$f(x_0) - y_0 > 0.$$

Definiamo ora

$$\varepsilon := \frac{f(x_0) - y_0}{2},$$

che ovviamente possiamo scrivere anche come

$$f(x_0) = y_0 + 2\varepsilon.$$

Siccome f è continua esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ma allora, per ogni (x, y) nel rettangolo

$$\mathcal{R} = \big(x_0 - \delta \, , \, x_0 + \delta\big) \times \big(y_0 - \varepsilon \, , \, y_0 + \varepsilon\big)$$

si ha

$$y < y_0 + \varepsilon = \big(f(x_0) - 2\varepsilon\big) + \varepsilon = f(x_0) - \varepsilon < f(x),$$

e quindi $\mathcal{R} \subset \Omega$. Infine, siccome il rettangolo $\mathcal{R}$ contiene una palla di centro (x_0, y_0) e raggio $r = \min\{\varepsilon, \delta\}$, abbiamo che Ω è un aperto. □

Dimostrazione 2. Dimostreremo che l'insieme

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Omega := \Big\{ (x, y) \ : \ y \geq f(x) \Big\}$$

è un chiuso (per successioni). Sia

$$X_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$$

una successione convergente ad un certo

$$X_\infty = (x_\infty, y_\infty) \in \mathbb{R}^2.$$

Per definizione, abbiamo che

$$f(x_n) \leq y_n \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Siccome f è continua, abbiamo che

$$f(x_\infty) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \leq \lim_{n \to \infty} y_n = y_\infty,$$

e quindi $X_\infty = (x_\infty, y_\infty) \in \mathbb{R}^2$. □