Calcolo Differenziale e Integrazione, Anno Accademico 2001-2002, Matematica

Guasoni, Modica, Tortorelli

VII foglio di compendio alla teoria
Note alle lezioni del 17 maggio e del 20 maggio 2002

OSSERVAZIONI SU EQUAZIONI E SISTEMI DIFFERENZIALI LINEARI AUTONOMI

Notazioni: - Con $\mathrm{P}(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1}\ldots + a_0$, $n \in \mathbf{N}$ e $a_{n-1}, \ldots a_0 \in \mathbf{C}$ si indica un polinomio di *grado* n con coefficienti in $\mathbf{C}$. Sia r il numero delle sue radici.
- Se $\lambda \in \mathbf{C}$ con $m_\lambda \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ si indica la molteplicità di λ come radice di $\mathrm{P}(z)$.
- In particolare se λ non è radice di $\mathrm{P}(z)$ si ha $m_\lambda = 0$. Se $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ è una numerazione di tutte e sole le radici di $\mathrm{P}(z)$ per brevità si usa anche la notazione m_k per m_{λ_k}, $1 \leq k \leq r$.
- Se $\lambda \in \mathbf{C}$ si indica semplicemente con λ l'operatore di moltiplicazione di una funzione per lo scalare λ. Con D si indica l'operatore di derivazione $u \mapsto u'$. Quindi con $\mathrm{P}(\mathrm{D})$ si indica *l'operatore differenziale lineare* $\mathrm{D}^n + a_{n-1}\mathrm{D}^{n-1} + \ldots + a_0$ su $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.
- Considerando il prodotto di composizione tra operatori lineari si ha $\mathrm{P}(\mathrm{D}) = \prod_{\lambda \in \mathbf{C}}(\mathrm{D} - \lambda)^{m_\lambda}$

Osservazione 1: Nel caso di funzioni di variabile reale a valori complessi valgono le usuali regole di derivazione del prodotto e quindi la regola di integrazione per parti. Inoltre valgono le usuali regole per la primitiva e la derivata dell'esponenziale anche per esponenti con coefficienti complessi.

Lemma 2: Siano $q \in \mathbf{C}[z]$, $\lambda \in \mathbf{C}$, se $\varphi'(t) = q(t)e^{t\lambda}$ allora si ha $\varphi(t) = \tilde{q}(t)e^{t\lambda}$ ove nel caso $\lambda \neq 0$ si ha $deg\tilde{q} = degq$, nel caso $\lambda = 0$ si ha $deg\tilde{q} = degq + 1$.

DIMOSTRAZIONE: Se $\lambda = 0$ la prova è diretta per integrazione. Nel caso $\lambda \neq 0$ si procede per induzione su $degq$. Il caso di costanti è immediato. Per il passo induttivo si integra per parti, come spiegato nell'osservazione, derivando il polinomio, e si applica l'ipotesi induttiva all'integrale del secondo membro: $\int q'(t)\frac{e^{t\lambda}}{\lambda}dt$. •

Proposizione 3: Ogni soluzione di $\mathrm{P}(\mathrm{D})u = 0$ è combinazione lineare a coefficienti in $\mathbf{C}$ delle n funzioni: $t^h e^{t\lambda_k}$, $0 \leq h \leq m_k - 1$, $1 \leq k \leq r$.

DIMOSTRAZIONE: La tesi è che ogni soluzione u dell'equazione differenziale $\mathrm{P}(\mathrm{D})u = 0$ è del tipo $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k(t)e^{t\lambda_k}$, $p_k \in \mathbf{C}[z]$, $deg\ p_k \leq m_k - 1$. Si prova per induzione su $deg\mathrm{P}$.
- Se $deg\mathrm{P} = 1$ si ha $\mathrm{P}(\mathrm{D}) = D - \lambda$, e tutte le soluzioni di $u' - \lambda u = 0$ sono $ce^{t\lambda}$, $c \in \mathbf{C}$.
- Se $\mathrm{P}(\mathrm{D}) = (\mathrm{D} - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\mathrm{D} - \lambda_r)^{m_r}$, con $deg\mathrm{P} > 1$ si ha:

$$\mathrm{P}(\mathrm{D})u = 0 \ \Leftrightarrow (\mathrm{D} - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\mathrm{D} - \lambda_r)^{m_r - 1}\left((\mathrm{D} - \lambda_r)u\right) = 0.$$

Per ipotesi induttiva $(\mathrm{D} - \lambda_r)u = \sum_{k=1}^{r} q_k(t)e^{t\lambda_k}$: $\deg q_r \leq m_r - 2$, $deg\ p_k \leq m_k - 1$ se $k \neq r$.
Ora u sarà del tipo $u^* + ce^{t\lambda_r}$, ove u^* è soluzione particolare di : $(\mathrm{D} - \lambda_r)u^* = \sum_{k=1}^{r} q_k(t)e^{t\lambda_k}$.
Moltiplicando per $e^{-t\lambda_r}$: $\quad D(u^* e^{-t\lambda_r}) = \sum_{k=1}^{r} q_k(t)e^{t(\lambda_k - \lambda_r)}$.
Se $\varphi_k' = q_k(t)e^{t(\lambda_k - \lambda_r)}$ si sceglie $u^* e^{-t\lambda_r} = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k$. Per il lemma si ha:
$u^* e^{-t\lambda_r} = \sum_{k=1}^{r-1} \tilde{q}_k e^{t(\lambda_k - \lambda_r)} + \tilde{q}_r$, $deg\tilde{q}_r = degq_r + 1 \leq m_r - 1$, $deg\tilde{q}_k = degq_k \leq m_k - 1$ se $k \neq r$,
e quindi $u = u^* + ce^{t\lambda_r} = \sum_{k=1}^{r} \tilde{q}_k e^{t\lambda_k} + ce^{t\lambda_r}$. •

Teorema 4: Le n funzioni: $t^h e^{t\lambda_k}$, $0 \leq h \leq m_k - 1$, $1 \leq k \leq r$ sono una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale $\mathrm{D}^n u + a_{n-1}\mathrm{D}^{n-1}u + \ldots + a_0 u = 0$.

DIMOSTRAZIONE: Da risultati noti lo spazio delle soluzioni ha dimensione n. •

Il lemma 2 può essere specificato con il seguente criterio

Proposizione 5:[Coefficienti indeterminati] Dati $p \in \mathbf{C}[z]$, $p(t) = \alpha_d t^d + \ldots + \alpha_0$, $\mu \in \mathbf{C}$ l'equazione differenziale:

$$\mathrm{P(D)}u\ (t) = \ p(t)e^{t\mu}$$

ha una soluzione del tipo $t^{m_\mu} q(t) e^{t\mu}$ con $q \in \mathbf{C}[z]$ e $deg\ q = deg\ p$.

DIMOSTRAZIONE: - Se $\mathrm{P}(z) = (z-\mu)^n$, si considera l'unico polinomio $\tilde{q}$ tale che $D^n \tilde{q} = p$ e $\tilde{q}(0) = \ldots D^{n-1}\tilde{q}(0) = 0$. Con n integrazioni da 0 a t si ha:

$$\tilde{q}(t) = \frac{d!}{(d+n)!}\alpha_d t^{d+n} + \ldots + \frac{1}{n!}\alpha_0 t^n = t^n q(t).$$

Per un noto lemma $\mathrm{P(D)}(\tilde{q}e^{t\mu}) = (D-\mu)^n(\tilde{q}e^{t\mu}) = e^{t\mu}D^n\tilde{q} = pe^{t\mu}$.

Se μ non è l'unica radice di P si procede per induzione su degP. Se $deg\mathrm{P} = 1$ allora $\mathrm{P(D)} = \mathrm{D} - \lambda$. Moltiplicando l'equazione $u' - \lambda u = pe^{t\mu}$ per $e^{-t\lambda}$ si ottiene $(e^{-t\lambda}u)' = pe^{t(\mu-\lambda)}$.
Per il lemma $e^{-t\lambda}u = qe^{t(\mu-\lambda)}$ con $degq = degp$ essendo $\lambda \neq \mu$.

Per il passo induttivo sia $\mathrm{P(D)} = (\mathrm{D}-\lambda_1)^{m_1} \ldots (\mathrm{D}-\lambda_r)^{m_r}$, con $deg\mathrm{P} > 1$. Si prende $\lambda_1 \neq \mu$ e si sceglie u del tipo desiderato grazie all'ipotesi induttiva in quanto μ ha la stessa molteplicità come radice di $P(z)$ e di $(z-\lambda_1)^{m_1-1} \ldots (z-\lambda_r)^{m_r}$:

$$\begin{cases} v' - \lambda_1 v = pe^{t\mu} \\ \\ (\mathrm{D}-\lambda_1)^{m_1-1} \ldots (\mathrm{D}-\lambda_r)^{m_r} u = v = \tilde{q}e^{t\mu}\ , \quad degp = deg\tilde{q} \end{cases} \quad \bullet$$

Osservazione 6:[Separazione delle variabili per sistemi] - Data A matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbf{C}$ se si cercano le soluzioni non nulle del sistema $U'(t) = AU(t)$ del tipo: $U(t) = \varphi(t)V$ (cioè $U_h(t) = \varphi(t)V_h,\ h \in \{1, \ldots n\}$ con $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ e $V \in \mathbf{C}^n$), ovvero quelle ove la variabile $t \in \mathbf{R}$ su cui agisce l'operatore di derivata è *"separata "* dalla variabile indice $h \in \{1, \ldots n\}$ su cui agisce la matrice A si ottiene che:

$$\varphi'(t)V_h = \varphi(t)\sum_{k=1}^{n} A_{hk}V_k$$

e quindi si ha che $\varphi' = \lambda\varphi$ e $AV = \lambda V$. Per cui le soluzioni a *"variabili separate"* sono $ce^{t\lambda}V$, $c \in \mathbf{C}$ arbitrario, $\lambda \in \mathbf{C}$ autovalore di A, $V \in \mathrm{Ker}(A-\lambda)$ un qualsiasi autovettore corrispondente a λ.
Quanto osservato suggerisce un primo passo per trovare un sistema fondamentale di soluzioni per $U' = AU$. Indicando con D l'operatore di derivazione ed osservando che gli operatori D ed A commutano:

$$\begin{aligned} &D - A = (D-\lambda) - (A-\lambda), \\ &D^{m+1} - A^{m+1} = (D-\lambda)^{m+1} - (A-\lambda)^{m+1} = (D-A)\textstyle\sum_{h=0}^{m}(D-\lambda)^{m-h}(A-\lambda)^h \end{aligned}$$

Se quindi $(D-\lambda)^{m+1}\varphi(t) = 0$ e $(A-\lambda)^{m+1}V = 0$ si ha che la funzione

$$\sum_{h=0}^{m}(D-\lambda)^{m-h}\varphi(t)(A-\lambda)^h V$$

è soluzione del sistema $U' = AU$. Osservando che le soluzioni di $(D-\lambda)^{m+1}\varphi(t) = 0$ hanno come base le funzioni $t^k e^{t\lambda}$, $0 \leq k \leq m$, e ammettendo una base di $\mathbf{C}^n$ di Jordan per A

si otterrebbe una base dello spazio delle soluzioni. Si enuncia un risultato meno preciso ma nella pratica utile:

Proposizione 7: Data A matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbf{C}$ una base dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema $U'(t) = AU(t)$ è del tipo

$$U^0 e^{t\lambda}, \ldots, U^{m-1}(t) e^{t\lambda}$$

al variare di λ tra gli autovalori di A, con m eguale alla molteplicità di λ come radice di $det(A - z)$, ed $U^k(t)$ vettore le cui componenti sono polinomi di grado *minore* eguale a k.

(In effetti se λ avesse molteplicità geometrica eguale ad $g \leq m$ gli U^k, $0 \leq k \leq g-1$, sarebbero costanti e costituirebbero una base dell'autospazio di autovalore λ. U_0 sarà sempre costante, e sarà un autovettore di A relativo a λ.)

Proposizione 8:[Caso reale per equazioni] Sia $\mathrm{P} \in \mathbf{R}[x]$ allora una base dello spazio delle soluzioni di $\mathrm{P}(D)u = 0$ è dato dalle n funzioni: $t^k e^{t\alpha}\cos(t\beta),\ t^k e^{t\alpha}\sin(t\beta),\ 0 \leq k \leq m_\lambda - 1$, $\alpha + i\beta$ radice di P e $\beta \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE: -1 Le soluzioni a valori complessi formano uno spazio vettoriale $\mathcal{S}_{\mathbf{C}}$ su $\mathbf{C}$ di dimensione n.

2- Usando ora l'ipotesi che P è a coefficienti reali si ha che le soluzioni a valori reali formano uno spazio vettoriale $\mathcal{S}_{\mathbf{R}}$ su $\mathbf{R}$ di dimensione n: infatti se una funzione è soluzione lo è anche la sua coniugata, e quindi per linearità ed unicità se una soluzione è reale in punto con le sue prime $n-1$ derivate è a valori reali. Quindi una base di $\mathcal{S}_{\mathbf{C}}$ che ha dati iniziali reali è costituita da funzioni a valori reali.

Una base di $\mathcal{S}_{\mathbf{C}}$ costituita da funzioni a valori reali risulta quindi essere una base di $\mathcal{S}_{\mathbf{R}}$.

3- Essendo P a coefficienti reali si ha che $\lambda = \alpha + i\beta$ è radice di P se e solo se $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ lo è, ed hanno la stessa molteplicità.
Posto $\varphi_{k,\lambda}(t) = t^k e^{t\lambda}$ si ha $\varphi_{k,\overline{\lambda}} = \overline{\varphi_{k,\lambda}}$. Si osserva

$$\begin{cases} \gamma_{k,\lambda} =: \frac{\varphi_{k,\lambda} + \varphi_{k,\overline{\lambda}}}{2} = t^k e^{t\alpha}\cos(t\beta) \\ \\ \sigma_{k,\lambda} =: \frac{\varphi_{k,\lambda} - \varphi_{k,\overline{\lambda}}}{2i} = t^k e^{t\alpha}\sin(t\beta) \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_{k,\lambda} = \gamma_{k,\lambda} + i\sigma_{k,\lambda} \\ \\ \varphi_{k,\overline{\lambda}} = \sigma_{k,\lambda} + i\gamma_{k,\lambda} \end{cases}$$

4- Essendo l'insieme $\{\varphi_{k,\lambda},\ \varphi_{k,\overline{\lambda}}:\ 0 \leq k \leq m_\lambda - 1,\ \ \mathrm{Im}\lambda \geq 0\}$ una base di $\mathcal{S}_{\mathbf{C}}$, dalla prima relazione si ottiene che $\{\gamma_{k,\lambda},\ \sigma_{k,\lambda}:\ 0 \leq k \leq m_\lambda - 1,\ \ \mathrm{Im}\lambda \geq 0\}$ è un insieme linearmente indipendente su $\mathbf{C}$. Osservando quindi che ha esattamente n elementi che sono funzioni a valori reali si ha che è una base di $\mathcal{S}_{\mathbf{R}}$. •