Calcolo Differenziale e Integrazione, Anno Accademico 2001-2002, Matematica

Guasoni, Modica, Tortorelli

VII foglio di esercizi
21 gennaio 2002

NOTA: per le principali definizioni e altri esercizi riguardo all'argomento si rimanda ai libri di testo: J.P. Cecconi, G. Stampacchia, Analisi Matematica II, J.P. Cecconi, L.C Piccinini, G. Stampacchia, Esercizi e problemi di Analisi Matematica II, o al IV foglio di compendio alla teoria pagg. 1-15.

ESERCIZIO n. 1 Siano $d : X \times X \to \mathbf{R}^+$, $\rho : X \times X \to R^+$, $\delta : Y \times Y \to \mathbf{R}^+$, distanze sull'insieme X e sull'insieme Y. Si discuta quale delle seguenti funzioni è ancora una distanza.

$$d_1(a,b) = \tfrac{d(a,b)}{1+d(a,b)} \ ; \quad d_2(a,b) = \operatorname{artan}(d(a,b)) \ ; \quad d_3(a,b) = \min\{d(a,b), 1\} \ ;$$

$$d_4((a,\alpha),(b,\beta)) = \max\{d(a,b); \delta(\alpha,\beta)\} \ ; \quad d_5((a,\alpha),(b,\beta)) = (d(a,b)^p + \delta(\alpha,\beta)^p)^{\frac{1}{p}} \ , \ p \geq 1 \ ;$$

$$d_6(a,b) = \max\{d(a,b); \rho(a,b)\} \ ; \quad d_7(a,b) = (d(a,b)^p + \rho(a,b)^p)^{\frac{1}{p}} \ , \ p \geq 1 \ ;$$

$$d_8(a,b) = \Psi(d(a,b)), \ \Psi \text{ concava, non negativa, nulla in } 0 \ ; \quad d_9(a,b) = \chi_{]0;+\infty[}(d(a,b)).$$

ESERCIZIO n. 2 Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita con norme $|\cdot|_V$ e $|\cdot|_W$. Si provino le seguenti eguaglianze e quindi che la funzione definita è una norma sullo spazio vettoriale delle funzioni lineari da V in W.

$$L \mapsto \|L\| =_{def} \sup_{v \in V \setminus (0)} \frac{|Lv|_W}{|v|_V} = \sup_{|v|_V = 1} |Lv|_W = \sup_{0 < |v|_V \leq 1} \frac{|Lv|_W}{|v|_V} = \sup_{0 < |v|_V \leq 1} |Lv|_W .$$

ESERCIZIO n.3 Si calcolino le norme delle seguenti funzioni lineari, estendendo la definizione negli ultimi due casi:

$$L(x,y) = ax + by \ ; \quad L(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ ; \quad x \in \mathbf{R}^n \mapsto Ax \in \mathbf{R}^n, \ {}^tAA = I \ ;$$

$$f \in C([0;1]) \mapsto \textstyle\int_0^1 f(y)dy \in \mathbf{R}, \ |g|_C = \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x)| \ ;$$

$$f \in C([0;1]) \mapsto \textstyle\int_0^x f(y)dy \in C([0;1]), \ |g|_C = \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x)|.$$

ESERCIZIO n.4 Se A è una matrice $n \times n$ si provi che $\|A\|^2 = \|{}^tAA\|$. Si mostri che non sempre $\|A\|^2 = \|A^2\|$.