Calcolo Differenziale, Integrazione
C.d.L Matematica, A.A. 2001-02
GUASONI, MONICA, TORTORELLI

VI FOGLIO DI COMPENDIO ALLA TEORIA

Cambiamento di variabili negli integrali multidimensionali à la Riemann.
(15, 19 Aprile 2002, V. Tortorelli)

0. Si richiamano alcune nozioni presentate in precedenti lezioni

Definizione 1. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice di <u>misura nulla secondo Peano-Jordan</u> se 1_A è Riemann integrabile e $\int 1_A(x)dx = 0$

Osservazione 1. - In particolare un tale insieme è limitato.
- Se $|f| \le M$ su A allora $\exists \int_A f = 0$: $|f|1_A \le M 1_A$
- Se A e B hanno misura nulla allora anche $A \cup B$ ha misura nulla: $1_{A\cup B} \le 1_A + 1_B$.

Proposizione 1 A è di misura nulla $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists R_i = \prod_{j=1}^{n} [a_j^i, b_j^i] : A \subseteq (\bigcup_{i=1}^{N} R_i)^\circ$ e $\sum_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{n} (b_j^i - a_j^i) \le \varepsilon$
e ciò è equivalente a considerare un tale ricoprimento con n-intervalli con interni a due a due disgiunti

Proposizione 2. $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
I. $\{x : 1_A \text{ è discontinua in } x\} = \partial A$
II. 1_A è Riemann integrabile se e solo se lo sono $1_{A^\circ}, 1_{\bar{A}}$ se e solo se $\int 1_{\partial A} = 0$

DIMOSTRAZIONE DI II $\Rightarrow$
1_A Riemann integrabile : $\exists\, \sigma_1, \sigma_2$ semplici $\sigma_1 \le 1_A \le \sigma_2$, $0 \le \begin{matrix} \int\sigma_2 - \int 1_A \\ \int 1_A - \int\sigma_1 \end{matrix} \le \varepsilon$
Si considerino le due funzioni: $\tau_1(x) = \begin{cases} 0 & \sigma_1(x) \le 0 \\ 1 & \sigma_1(x) > 0 \end{cases}$ $\tau_2(x) = \begin{cases} 0 & \sigma_2(x) < 1 \\ 1 & \sigma_2(x) \ge 1 \end{cases}$

esse sono <u>ancora semplici</u> e $\tau_1 \le 1_A \le \tau_2$, $0 \le \begin{matrix} \int\tau_2 - \int 1_A \\ \int 1_A - \int\tau_1 \end{matrix} \le \varepsilon$. Si ha
$\tau_1 = \sum_{i=1}^{M} 1_{R_i}$ R_i rettangoli $R_i^\circ \cap R_j^\circ = \emptyset$ $\tau_2 = \sum_{i=1}^{N} 1_{Q_i}$ Q_i rettangoli $Q_i^\circ \cap Q_j^\circ = \emptyset$
Si ha $\sum 1_{R_i^\circ} =: \varphi_1 \le 1_{A^\circ} \le 1_A \le 1_{\bar{A}} \le \sum 1_{\bar{Q}_i} =: \varphi_2$ e $0 \le 1_{\partial A} \le \varphi_2 - \varphi_1$.
Poichè $\int \varphi_i = \int \tau_i$ si ha : $\exists \int 1_{\partial A} = 0$ e per additività $\exists \int 1_{\bar{A}}, \int 1_{A^\circ} = \int 1_A$.

Osservazione 2. Dalla diseguaglianza triangolare si deduce che se A ha misura nulla ed f è Riemann integrabile $\int_A f\,dx = 0$. Si osservi che $\int 1_A \gneq 0 \Rightarrow A^\circ \ne \emptyset$

Osservazione 3. Se A è una porzione di grafico di una (A limitato) funzione di $(n-1)$-variabili, rispetto ad $(n-1)$ coordinate della base canonica, che sia Riemann integrabile allora A ha misura nulla

In particolare i sottoinsiemi limitati di sottospazi affini di dimensione $h \lneq n$ hanno misura nulla

Definizione 2 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice Peano-Jordan misurabile se 1_A è Riemann integrabile. Si scriverà $A \in \mathcal{PJ}$. Tale A sarà limitato. Nel caso il numero $\int 1_A(x)\,dx$ si dice misura (secondo Peano-Jordan) di A, e si usa la notazione:

$$m(A)$$

Proposizione 3

1) $\displaystyle\times_{i=1}^{n} [a_i; b_i] \in \mathcal{PJ}$: $m\left(\displaystyle\times_{i=1}^{n} [a_i; b_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

2) $A, B \in \mathcal{PJ} \Rightarrow A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \in \mathcal{PJ}$ (semialgebra)

〃 e $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \le m(B)$ (monotonia)

〃 e $A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ (additività)

3) $A \in \mathcal{PJ},\ v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A + v =: \{x : \exists a \in A \text{ e } x = a + v\} \in \mathcal{PJ}$ (invarianza per traslazioni)

$m(A+v) = m(A)$

4) $A \in \mathcal{PJ},\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda A \in \mathcal{PJ}$ e $m(\lambda A) = |\lambda|^n m(A)$ (invarianza per dilatazioni)

DIMOSTRAZIONE

1) Segue dalla definizione 2) Poiché $\partial(A \cup B), \partial(A \cap B), \partial(A \setminus B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ che ha misura nulla la prima implicazione segue dalla proposizione 2. La seconda dalla monotonia dell'integrale $1_A \le 1_B \Rightarrow m(A) = \int 1_A \le \int 1_B = m(B)$. La terza dall'additività dell'integrale: $1_{A\cup B} + 1_{A\cap B} = 1_A + 1_B$

3), 4) Tali asserti sono veri per definizione se A è un rettangolo essendo $v + A$ e λA rettangoli. Osservando quindi che se $\sigma(x)$ è semplice anche $\sigma(x - v)$ e $\sigma(\frac{x}{\lambda})$ sono semplici si procede come segue

$$\forall \varepsilon \quad \exists \sigma_1, \sigma_2 \text{ semplici} \quad \sigma_1 \le 1_A \le \sigma_2 \qquad \int \sigma_2 - \int 1_A \le \varepsilon \quad \int 1_A - \int \sigma_1 \le \varepsilon$$

$$\sum \lambda_i 1_{R_i + v}(x) = \sigma_1(x - v) \le 1_A(x - v) = 1_{A+v}(x) \le \sigma_2(x - v) = \sum \gamma_i 1_{R_i + v}(x)$$

$$\sum \lambda_i 1_{\lambda R_i}(x) = \sigma_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) \le 1_A\left(\frac{x}{\lambda}\right) = 1_{\lambda A}(x) \le \sigma_2\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum \gamma_i 1_{\lambda R_i}(x)$$

Per quanto osservato l'asserto vale per le funzioni semplici; quindi:

$\int \sigma_i(x - v) = \int \sigma_i(x)$, $\int \sigma_i\left(\frac{x}{\lambda}\right) = |\lambda|^n \int \sigma_i(x)$ per linearità dell'integrale. Quindi per definizione di integrale si ha la tesi.

Osservazione 4 Queste proprietà caratterizzano la misura di Peano-Jordan

Proposizione 4 Se $\mu : \mathcal{PJ} \to \mathbb{R}$ soddisfa 1), 2), 3) allora $\mu \equiv m$ ([CS] 32.13)

Osservazione 5 LA STRATEGIA PER PROVARE 3) E 4)

Rettangoli $\longrightarrow$ semplici $\longrightarrow$ Riemann integrabili

SARÀ USATA DIFFUSAMENTE IN QUANTO SEGUE.

1. Prima parte: cambiamenti di coordinate affini.

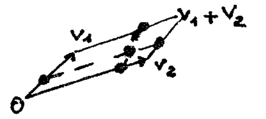
Definizione 3 $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$: $A+B =: \{x \in \mathbb{R}^n : \exists a \in A, b \in B : x = a+b\} = \bigcup_{b \in B} (A+b)$

Osservazione 6 $A + A \supseteq 2 \cdot A = \{x : \exists a \in A : x = 2a\}$ in generale sono diversi.

Definizione 4 Parallelepipedo generato da $0, v_1, \dots, v_m, v_1 + \dots + v_m$

$$P(v_1 \cdots v_m) =: \{x ; x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i ; 0 \le \lambda_i \le 1\} = (v_1, \dots, v_m)([0;1]^m)$$

e.g. $P(v_1)$ = segmento tra 0 e v_1, $P(v_1, v_2)$ = parallelogramma di vertici $0, v_1, v_2, v_1+v_2$



Lemma 1 Se $v_1 \cdots v_{n-m} \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente dipententi, oppure $m \gneq 0$ allora $m(P(v_1 \cdots v_{n-m})) = 0$

DIMOSTRAZIONE

Per le ipotesi fatte $P(v_1 \cdots v_{n-m})$ è contenuto in un sottospazio di dimensione $h \lneq n$ e limitato.

Lemma 2 $m(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_1 \cdots v_n)|$

DIMOSTRAZIONE. I parallelepipedi sono misurabili avendo frontiera di misura 0. Si prova che $f(v_1, \dots v_n) =: \mathrm{sign}(\det(v_1 \dots v_n)) \cdot \mathrm{mis}(P(v_1 \cdots v_n))$ è multilineare ed alternante e vale 1 sulla base canonica. Per unicità del determinante si conclude.

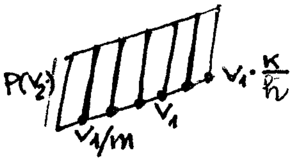
i. $f(e^1, \dots e^n) = \mathrm{sign}(\det(\mathrm{Id})) \cdot \mathrm{mis}\, P(e^1 \dots e^n) = 1 \cdot \mathrm{mis}([0;1]^n) = 1$

ii. $f(v_{\sigma_1} \cdots v_{\sigma_n}) = (-1)^{\mathrm{segno}\,\sigma} \mathrm{sign}(\det(v_1 \cdots v_n)) \cdot \mathrm{mis}\, P(v_{\sigma_1} \cdots v_{\sigma_n})$, ma $\underline{P(v_1 \cdots v_n) = P(v_{\sigma_1} \cdots v_{\sigma_n})}$.

iii. Per provare $f(\dots, \lambda v_i, \dots) = \lambda f(v_1, \dots v_n)$ grazie a ii basta provare

$$m(P(\lambda v_1, \dots, v_n)) = |\lambda|\, m(P(v_1, \dots v_n))$$

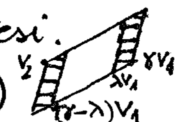
- Poichè $\boxed{P(v_1 \dots v_n) = P(v_1) + P(v_2 \cdots v_n)} = v_1 + P(-v_1) + P(v_2 \cdots v_n) = v_1 + P(-v_1, v_2 \cdots v_n)$ grazie all'<u>invarianza</u> <u>per traslazioni</u> della misura ci si riduce a $\lambda \geq 0$
- Se $\lambda = \frac{k}{h} \geq 0$ razionale poichè $P(\frac{k}{h} v_1, v_2 \dots v_n) = \bigcup_{l=0}^{k-1} (\frac{l}{h} v_1 + P(\frac{v_1}{h}, \dots v_n))$



e le intersezioni degli elementi dell'unione sono parallelepipedi $(n-1)$-dimensionali quindi con misura nulla sempre per <u>invarianza</u> <u>per traslazioni</u> e per <u>additività</u> si ha

$$m(P(\tfrac{k}{h} v_1, \dots v_n)) = k\, m(P(\tfrac{v_1}{h} \cdots v_n)) = \tfrac{k}{h}(h \cdot (m(P(\tfrac{v_1}{h}, \dots v_n)) = \tfrac{k}{h} P(v_1, \dots v_n)$$

- Se si prova che $g(\lambda) = m(P(\lambda v_1, v_2 \cdots v_n))$ è <u>continua</u> si ha la tesi.



Poichè per $\gamma > \lambda$: $P(\gamma v_1, \dots v_n) \setminus P(\lambda v_1, \dots v_n) \subseteq \lambda v_1 + P((\gamma - \lambda) v_1, \dots v_n)$

per <u>invarianza</u> <u>per traslazioni</u> e per <u>additività</u> della misura si ha:

$m(P(\gamma v_1, \dots v_n) \setminus P(\lambda v_1, \dots v_n)) = m(P(\gamma v_1, \dots v_n)) - m(P(\lambda v_1, \dots v_n))$.

Per la continuità basta quindi provare $\lim_{h \to 0^+} g(h) = 0$.

Essendo per $h \geq 0$, g una funzione crescente, in quanto la misura è <u>monotona</u>, la tesi segue poichè per il punto precedente $\lim_{\substack{h \to 0^+ \\ h \in \mathbb{Q}}} g(h) = 0$, e $g(1/[1/h]) \geq g(h) \geq 0$.

iv. Per provare la linearità per colonne grazie a ii e a iii basta provare

$$f(v_1+w, v_2 \dots v_n) = f(v_1, v_2 \dots v_n) + f(w, v_2 \dots v_n)$$

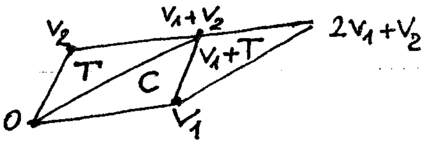
inoltre ci si riduce al caso $v_1, \dots v_n$ linearmente indipendenti, e quindi grazie a ii e iii al caso

$$f(v_1+v_2, v_2 \dots v_n) = f(v_1, v_2 \dots v_n)$$ e procedere poi per induzione.

Basterà provare $m(P(v_1+v_2, v_2 \dots v_n)) = m(P(v_1, v_2 \dots v_n))$

$P(v_1, v_2, \dots v_n) = P(v_1, v_2) + P(v_3, \dots, v_n)$

$P(v_1+v_2, v_2 \dots v_n) = P(v_1+v_2, v_2) + P(v_3, \dots, v_n)$



$= C \cup T + P(v_3 \dots v_n) \quad = (C + P(v_3 + \dots v_n)) \cup (T + P(v_3 + \dots + v_n))$

$= C \cup (T+v_1) + P(v_3 \dots v_n) \quad = (C + P(v_3 + \dots v_n)) \cup ((v_1+T) + P(v_3 + \dots v_n))$

poiché le intersezioni degli elementi delle unioni sono parallelepipedi $(n-1)$-dimensionali e quindi con misura nulla per <u>additività</u> ed <u>invarianza</u> per <u>traslazioni</u> della misura si ha quanto desiderato.

corollario 1 $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare, R n-intervallo $\Rightarrow m(LR) = |\det L| \cdot m(R)$

DIMOSTRAZIONE

$R = \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i; b_i] = (a_1, \dots, a_n) + P((b_1-a_1)e^1, \dots, (b_n-a_n)e^n)$.

$LR = L(a_1, \dots, a_n) + LP((b_1-a_1)e^1, \dots, (b_n-a_n)e^n) = L(a_1 \dots a_n) + P((b_1-a_1)Le^1, \dots, (b_n-a_n)Le^n)$

per invarianza per traslazioni della misura e multilinearità del determinante: tesi.

Teorema 1 $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare, $v \in \mathbb{R}^n$, $\psi(x) =: Lx + v$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

f Riemann integrabile su $\psi(A) \Leftrightarrow f \circ \psi$ Riemann integrabile su A

$$\int_{LA+v} f(x)dx = \int_A f(Lx+v)|\det L| dx$$

DIMOSTRAZIONE . Ci si può ridurre al caso $|\det L| \neq 0$: ψ bigettiva.

- $\forall \varepsilon \; \exists \sigma_1 = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i 1_{R_i} \;\; \sigma_2 = \sum_{i=1}^{M} \gamma_i 1_{R_i}$, R_i n-intervalli $\sigma_1 \le 1_{\psi(A)} f \le \sigma_2$, $|\int \sigma_i - \int_A f| < \varepsilon$

Essendo ψ bigettiva si ha anche : $\underline{\sigma_1 \circ \psi \le 1_A \cdot f \circ \psi \le \sigma_2 \circ \psi}$

- Essendo $\sigma_1 \circ \psi = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i 1_{\psi^{-1}(R_i)}$, $\sigma_2 \circ \psi = \sum_{i=1}^{M} \gamma_i 1_{\psi^{-1}(R_i)}$, poiché ψ^{-1} è affine e $\psi^{-1}(R_i)$ sono quindi parallelepipedi, si ha che $\sigma_1 \circ \psi$ e $\sigma_2 \circ \psi$ <u>sono integrabili</u>:
- $\int \sigma_1(\psi(x))dx = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i m(\psi^{-1} R_i) = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i m(L^{-1}R_i - L^{-1}v) = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i m(L^{-1}R_i) = \frac{1}{|\det L|} \sum_{i=1}^{M} \lambda_i m(R_i)$

analogamente $\int \sigma_2(\psi(x))dx = \frac{1}{|\det L|} \int \sigma_2(x)dx$

Quindi $\int \sigma_2 \circ \psi - \int \sigma_1 \circ \psi \le \frac{2\varepsilon}{|\det L|}$ per caratterizzazione di integrabilità ne segue che $1_A \cdot f \circ \psi$ è integrabile e $\int_A f(\psi(x))dx = \frac{1}{|\det L|} \int_{\psi(A)} f(x)dx$

Il viceversa si ottiene considerando ψ^{-1}, A, $f \circ \psi$ al posto di ψ, $\psi(A)$, f.

Introduzione alla seconda parte

Osservazione 6 bis

Dato un generico cambiamento di coordinate $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ non necessariamente lineare o affine

$$Y = \Psi(X)$$

il risultato del corollario 1 suggerisce il seguente argomento euristico

$$dy_1 \cdots dy_n = \text{volume parallelepipedo infinitesimo} = |\det dy| \cong$$

$$\cong |\det d(\Psi(x))| = |\det(d\Psi(x) \cdot dx)| = |\det d\Psi(x)|\,|\det dx| =$$

$$|\det d\Psi(x)|\, dx_1 \cdots dx_n$$

che suggerisce sostituendo formalmente la seguente formula

$$\int_{\Psi(A)} f(y)\, dy_1 \cdots dy_n = \int_A f(\Psi(x))\, |\det d\Psi(x)|\, dx_1 \cdots dx_n$$

che generalizza quella provata per il teorema 1 con Ψ affine.

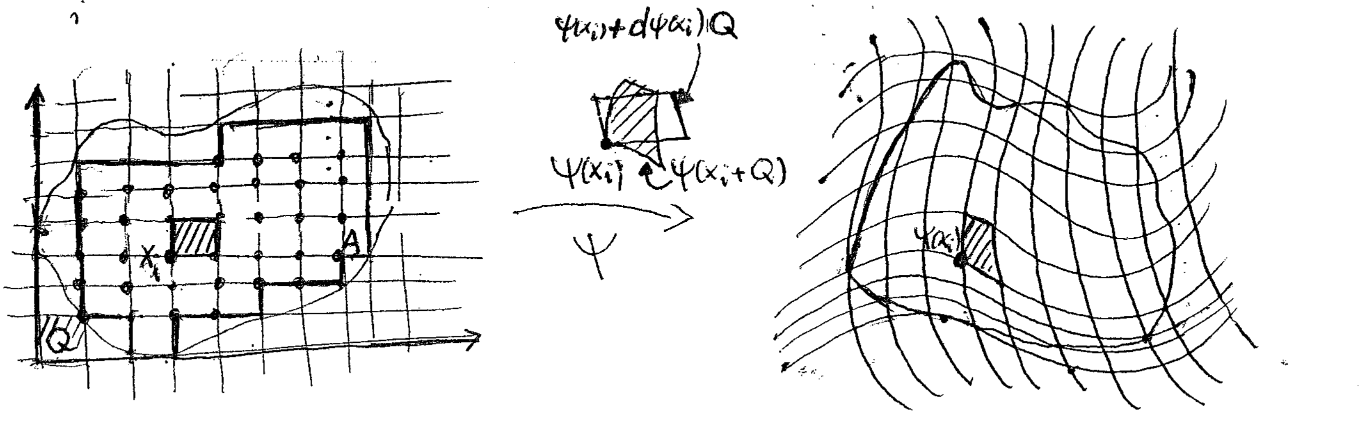
La sua dimostrazione ricalca, nel caso della teoria di Riemann, la seguente traccia basata sulla continuità scegliendo Q piccolo:

$$\int_{\Psi(A)} f(y)\,dy \sim \sum_i \int_{\Psi(x_i+Q)} f(y)\,dy \sim_{[\text{UNIF. CONT. } f]} \sum_i f(\Psi(x_i))\, m(\Psi(x_i+Q)) \sim$$

$$_{[\text{UNIF. CONT. } d\Psi;\ \Psi(y) \sim \Psi(x_i) + d\Psi(x_i)(y-x_i)]} \sum_i f(\Psi(x_i))\, m(d\Psi(x_i)Q + \Psi(x_i))$$

$$=_{[\text{INV. TRASL.}]} \sum_i f(\Psi(x_i))\, m(d\Psi(x_i)Q) =_{[\text{cor. 1}]} \sum f(\Psi(x_i))\, |\det d\Psi(x_i)|\, m(Q)$$

$$= \sum_i f(\psi(x_i))\, |\det d\Psi(x_i)|\, m(x_i+Q) \sim_{[\text{U.C.}]} \int_{\cup x_i+Q} f(\Psi(x))\, |\det d\Psi(x)|\, dx$$



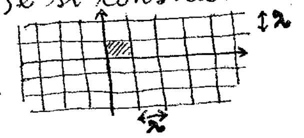
2 Seconda parte: cambiamenti di coordinate regolari

Si premette la seguente osservazione, conseguenza diretta della caratterizzazione della Riemann integrabilità per ampiezza delle suddivisione infinitesima.

corollario 2 $A \in \mathcal{PJ} \Rightarrow \forall \eta \forall \varepsilon > 0 \; \exists Q_1, \dots, Q_N : Q_i = \underline{x}_i + [0;\lambda]^n$ ipercubi congruenti

$$\partial A \cap \overline{Q}_i \neq \phi, \; \partial A \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{N} Q_i\right)^{o}, \; \sum_{i=1}^{N} m(Q_i) = N\lambda^n \leq \varepsilon, \; Q_i^{o} \cap Q_j^{o} = \phi, \; \lambda \leq \eta.$$

DIMOSTRAZIONE $\Rightarrow$ Dato $\varepsilon > 0$ sia δ il parametro di finezza dato dal citato criterio ([CS] 31.9 pag 360). Sia $\lambda \leq \min\{\eta, \delta/\sqrt{n}\}$ e si considerano gli ipercubi $\lambda \sum_{i=1}^{n} k_i e^i + [0;\lambda]^n$, $k_i \in \mathbb{Z}$, che intersecano ∂A



. Essi sono in numero finito poiché se $A \in \mathcal{PJ}$ allora A è limitato.

Definizione 5 Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ si dice cambiamento di coordinate regolare (c.c.r.) su Ω se:

i) $\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

ii) $\forall x \in \Omega$ $d\psi(x)$ è un operatore lineare invertibile da $\mathbb{R}^n$ in se, cioè: $\det d\psi(x) \neq 0$

iii) ψ è iniettiva su tutto Ω

Osservazione 7: Grazie al teorema di invertibilità locale si deduce nel caso che $\psi(\Omega) := \widetilde{\Omega}$ è aperto, e quindi la nozione data è equivalente a: ψ è un diffeomorfismo C^1 tra gli aperti di $\mathbb{R}^n$ Ω ed $\widetilde{\Omega}$, cioè:

ψ è bigettiva da Ω su $\widetilde{\Omega}$, $\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\psi^{-1} \in C^1(\widetilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$,

Teorema 2 Sia ψ un diffeomorfismo C^1 dall'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ all'aperto $\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se: Ω ed $\widetilde{\Omega}$ sono $\mathcal{P}$-$\mathcal{J}$-misurabili e $|\det d\psi|$ è Riemann integrabile su Ω allora per ogni g Riemann integrabile su $\widetilde{\Omega} = \psi(\Omega)$ si ha:

i) $g \circ \psi \, |\det d\psi|$ è Riemann integrabile su Ω

ii) $$\int_{\psi(\Omega)} g(x)\, dx = \int_{\Omega} g(\psi(x)) |\det d\psi(x)|\, dx$$

Osservazione 8 Per provare questo teorema ci si riduce al caso

$\{y \in \widetilde{\Omega} : g(y) \neq 0\}$ limitato e $\overline{\{y \in \widetilde{\Omega} : g(y) \neq 0\}} \subseteq \widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}^{o}$

Questa ulteriore ipotesi rende superflue:

1) le assunzioni di misurabilità su Ω e $\widetilde{\Omega}$: le integrande essendo nulle su aperti contenenti $\partial\Omega$ e $\partial\widetilde{\Omega}$

2) le assunzioni di integrabilità su $|\det d\psi|$: è una funzione continua su un compatto misurabile contenente $\psi^{-1}(\{g \neq 0\})$

Inoltre con questa ipotesi

3) l'assunzione di integrabilità di g su $\widetilde{\Omega}$ è equivalente a quella di $g \circ \psi |\det d\psi|$ su Ω e a quella di integrabilità della sola $g \circ \psi$ su Ω; in effetti ψ e ψ^{-1} diventano intercambiabili poiché: $0 < c \leq |\det(d\psi^{-1})| = |\det(d\psi) \circ \psi^{-1}|^{-1} \leq C < \infty$ su $\{g \neq 0\}$.

Si ha quindi

Proposizione 5 Sia Ψ un <u>diffeomorfismo</u> C^1 dell'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sull'aperto $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che: $\{y \in \mathbb{R}^n : f(y) \neq 0\}$ <u>è limitato</u>, $\overline{\{y \in \mathbb{R}^n : f(y) \neq 0\}} \subseteq \tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}^0$.

i) f Riem. int. $\Longleftrightarrow$ $f \circ \Psi \cdot |\det d\Psi|$ lo è $\Longleftrightarrow$ $f \circ \Psi$ lo è. Nel caso:

ii) $$\int f(x)\,dx = \int f(\Psi(x))\,|\det d\Psi(x)|\,dx$$

Una formulazione equivalente (cfr. Proposizione 6 nel seguito) è:

Proposizione 5bis Sia Ψ un <u>diffeomorfismo</u> C^1 dell'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sull'aperto $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che: A <u>è limitato</u>, $\overline{A} \subseteq \Omega = \Omega^0$. Sia $f : \Psi(A) \to \mathbb{R}$

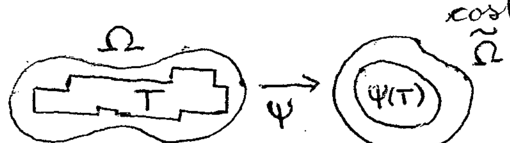
i) f Riem. int. su $\Psi(A)$ $\Longleftrightarrow$ $f \circ \Psi |\det d\Psi|$ lo è su A $\Longleftrightarrow$ $f \circ \Psi$ lo è su A.

ii) $$\int_{\Psi(A)} f(x)\,dx = \int_A f(\Psi(x))\,|\det d\Psi(x)|\,dx$$

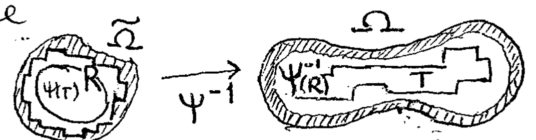
DIMOSTRAZIONE DI: [Proposizione 5 $\Longrightarrow$ Teorema 2]

- Poiché le funzioni R. int. sono un reticolo e uno spazio vettoriale si ha φ R. int $\Longleftrightarrow$ φ^+ e φ^- sono R. int. . Ciò permette di ridursi al caso <u>$g \geq 0$</u>.
- Usando la caratterizzazione di integrale a la R. con maggioranti e minoranti R. int ci si riduce a provare che, per un opportuno M, da scegliersi a posteriori dato $\varepsilon > 0$ vi sono $\gamma_1, \gamma_2 : \Omega \to \mathbb{R}$: γ_i Riem. int., $\gamma_1 \leq g \circ \Psi \cdot |\det d\Psi| \leq \gamma_2$, $\left|\int_\Omega \gamma_i - \int_{\tilde{\Omega}} g\right| \leq \varepsilon \cdot M$

costruzione

- 1) 

$m(\Omega \setminus T) \leq \varepsilon$

2) 

$m(\tilde{\Omega} \setminus R) \leq \varepsilon$ $\quad$ $\Omega \setminus \Psi^{-1}(R) \subseteq \Omega \setminus T$

1) $\Omega \in \mathcal{PJ} \Rightarrow m(\partial\Omega) = 0 \Rightarrow \exists S_1, \dots, S_M$ n-intervalli: $\partial\Omega \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^M S_i\right)^0$ e $\sum_{i=1}^M m(S_i) \leq \varepsilon$

$T =: \Omega \setminus \left(\bigcup_{i=1}^M S_i\right)^0$: $T = \overline{T}$, $T \in \mathcal{PJ}$, $m(\Omega \setminus T) \leq m\left(\bigcup_{i=1}^M S_i\right) \leq \sum_{i=1}^M m(S_i) \leq \varepsilon$

2) Poiché T è compatto e Ψ continua $\Psi(T)$ è compatto <u>in $\tilde{\Omega}$</u> quindi $\operatorname{dist}(\Psi(T), \partial\tilde{\Omega}) \geq \delta > 0$, quindi $\tilde{\Omega} \in \mathcal{PJ} \Rightarrow \exists P_1, \dots, P_N$ n-intervalli: $\partial\tilde{\Omega} \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^N P_i\right)^0 \subseteq \bigcup_{i=1}^N P_i \subseteq \tilde{\Omega} \setminus \Psi(T)$ e $\sum_{i=1}^N m(P_i) \leq \varepsilon$

$R =: \tilde{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N P_i\right)^0$: $R = \overline{R}$, $R \in \mathcal{PJ}$, $m(\tilde{\Omega} \setminus R) \leq \varepsilon$, $\Psi(T) \subseteq R \Rightarrow \boxed{\Omega \setminus \Psi^{-1}(R) \subseteq \Omega \setminus T}$

- <u>$\gamma_1 =: 1_R \circ \Psi \cdot g \circ \Psi \cdot |\det d\Psi|$</u>: $g \geq 0 \Rightarrow$ <u>$\gamma_1 \leq g \circ \Psi \cdot |\det d\Psi|$</u>, Prop. 5 con $f = 1_R \cdot g \Rightarrow$ <u>$\exists \int_\Omega \gamma_1 = \int_{\tilde{\Omega}} g$</u>.

(*) <u>$\gamma_2 =: \gamma_1 + 1_{\tilde{\Omega} \setminus R} \circ \Psi |\det d\Psi| \cdot (\sup g)$</u>: $\gamma_2 \geq g \circ \Psi |\det d\Psi|$, Prop. 5 con $f = 1_R \Rightarrow$ $\Rightarrow 1_R \circ \Psi |\det d\Psi|$ Riem. int. . Inoltre $|\det d\Psi|$ è per ipotesi Riem. int. quindi si ha <u>$\Rightarrow \gamma_2$ R. int.</u>

$1_{\tilde{\Omega} \setminus R} \circ \Psi |\det d\Psi| = (1_\Omega - 1_R \circ \Psi)|\det d\Psi| = |\det d\Psi| - 1_R \circ \Psi |\det d\Psi|$ $\quad$ $(1_R \circ \Psi = 1_{\Psi^{-1}(R)})$.

e <u>$\int_\Omega \gamma_2 = \int_\Omega \gamma_1 + \sup g \int_{\Omega \setminus \Psi^{-1}(R)} |\det d\Psi|$</u>

- Concludendo:

$0 \leq \int_{\tilde{\Omega}} g - \int_\Omega \gamma_1 = \int_{\tilde{\Omega} \setminus R} g \leq (\sup g) \cdot m(\tilde{\Omega} \setminus R) \leq [g \geq 0]\ (\sup g) \cdot \varepsilon$

$0 \leq \int_\Omega \gamma_2 - \int_\Omega \gamma_1 \leq [g \geq 0, \Omega \setminus \Psi^{-1}(R) \subseteq \Omega \setminus T]\ (\sup g) \cdot \int_{\Omega \setminus T} |\det d\Psi| \leq (\sup g) \sup|\det d\Psi|\, m(\Omega \setminus T) \leq (\sup g) \sup|\det d\Psi| \cdot \varepsilon$

per cui $\left|\int_\Omega \gamma_2 - \int_{\tilde{\Omega}} g\right| \leq (\sup g)(1 + |\det d\Psi|) \cdot \varepsilon$.

Osservazione 9 Per provare le proposizioni 5 e 5 bis si seguirà la seguente strategia.

1) un primo gruppo di proposizioni di carattere metrico-topologico che in particolare garantiscono che gli insiemi misurabili con chiusura in un aperto vengono trasformati da diffeomorfismi in insiemi misurabili

2) viste le ipotesi la ψ e la ψ^{-1} sono interscambiabili si decide quindi di rendere rigoroso l'argomento esposto alla fine dell'osservazione 6 bis di pagina 4 bis non come catena di eguaglianze ma come catena di disuguaglianze nel caso di integrande f che siano funzioni caratteristiche di insiemi misurabili con chiusure contenute nell'aperto. A tal fine si provano un secondo gruppo di proposizioni di carattere affine-differenziale

3) si passa ad integrande generiche nulle fuori di un chiuso limitato contenuto nell'aperto usando la caratterizzazione di integrale di Riemann con le maggioranti e minoranti Riemann integrabili dell'integranda.

Definizione 6 Sia $B \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisce $\operatorname{diam} B = \sup\{|x-y| : x \in B, y \in B\}$

- Se $\operatorname{diam} B = \delta$ allora $\forall x \in \overline{B}$ si ha $\overline{B} \subseteq \overline{B(x,\delta)}$, $(\operatorname{diam} B = \operatorname{diam} \overline{B})$
- $\operatorname{diam} [0;\lambda]^n = \sqrt{n}\,\lambda$.
- Esercizio Si trovi un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ con diametro $2R$ ma che non sia contenuto in nessuna palla di raggio R.

Definizione 7 Siano $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$: $\operatorname{dist}(x,C) = \inf\{|x-y| : y \in C\}$
$\operatorname{dist}(B,C) = \inf\{|x-y| : x \in B, y \in C\}$

Esercizio: $\operatorname{dist}(x,C) = \operatorname{dist}(x,\overline{C}) = \min\{|x-y| : y \in \overline{C}\}$, $\operatorname{dist}(B,C) = \operatorname{dist}(\overline{B},\overline{C})$
B limitato $\Rightarrow \operatorname{dist}(\overline{B},\overline{C}) = \min\{|x-y| : x \in \overline{B}, y \in \overline{C}\}$

Definizione 8 Sia $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$, si pone
$$B_\rho = B + \overline{B(0,\rho)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,B) \leq \rho\}$$

Sia ψ da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$

Lemma 3 ψ L-lipschitziana su $A \Rightarrow \operatorname{diam}\psi(A) \leq L \operatorname{diam} A$

Lemma 4 ψ localmente lipschitziana su $\Omega = \Omega^\circ \supseteq \overline{A}$, $m(A)=0 \Rightarrow m(\psi(A))=0$

Lemma 5 ψ omeomorfismo tra Ω e $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}^\circ$; $\Omega = \Omega^\circ \supseteq \overline{A}$, A limitato $\Rightarrow \partial\psi(A) = \psi(\partial A)$

Lemma 6 $\psi : \Omega \to \tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}^\circ$ bilipschitziana sui compatti, $\overline{A} \subseteq \Omega = \Omega^\circ$; A limitato:

$\Rightarrow$ $\psi(A)$ limitato, $\overline{\psi(A)} \subseteq \tilde{\Omega}$ e $[A \in PJ \Leftrightarrow \psi(A) \in PJ]$

DIMOSTRAZIONE

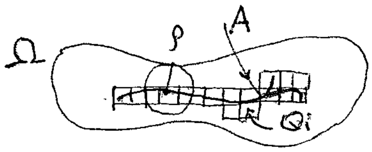
3. $\forall x, y \in A$ $|\psi(x) - \psi(y)| \leq L|x-y|$.

4. Si prova $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ σ semplice : $1_{\psi(A)} \leq \sigma$ e $\int \sigma \leq \varepsilon \cdot M$

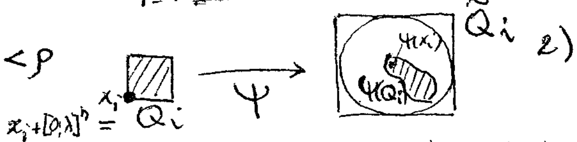
- $m(A) = 0 \Rightarrow A \in PJ \Rightarrow A$ limitato $\Rightarrow \overline{A}$ limitato $\Rightarrow \operatorname{dist}(\overline{A}, \partial\Omega) = \rho \gneq 0$
- Fissato $\varepsilon > 0$ per il corollario 2 $\exists$ $x_1 + [0;\lambda]^n = Q_1, \dots, x_N + [0;\lambda]^n = Q_N$ con

1) $A \subseteq \overline{A} = \partial A \subseteq (\bigcup_{i=1}^N Q_i)^\circ$, $m(\bigcup_{i=1}^N Q_i) = N\lambda^n < \varepsilon$

e inoltre $\lambda \lneq \rho/\sqrt{n}$, $\overline{A} \cap Q_i \neq \emptyset$ da cui segue $\boxed{\bigcup_{i=1}^N Q_i \subseteq \Omega}$

1) 

diam $[0;\lambda]^n = \sqrt{n}\,\lambda < \rho$



- Essendo $\bigcup_{i=1}^N Q_i = \overline{\bigcup_{i=1}^N Q_i}$ compatto, ψ è ivi lipschitziana per una certa costante L:

$$\operatorname{diam}\psi(Q_i) \leq L \operatorname{diam} Q_i = L\lambda\sqrt{n}$$

2) $\psi(Q_i) = \psi(x_i + [0;\lambda]^n) \subseteq B(\psi(x_i), L\lambda\sqrt{n}) \subseteq \psi(x_i) + [-L\lambda\sqrt{n}; L\lambda\sqrt{n}]^n =: \tilde{Q}_i$

$\psi(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^N \tilde{Q}_i$, posto $\sigma = \sum 1_{\tilde{Q}_i}$, si ha $1_{\psi(A)} \leq \sigma$ ed inoltre

$\int \sigma = \sum m(\tilde{Q}_i) = 2^n L^n \lambda^n n^{n/2} \cdot N \leq 2^n L^n n^{n/2} \varepsilon$.

5. Esercizio

6. - ψ localmente bilipschitziana $\Rightarrow \psi$ omeomorfismo $\overset{5}{\Rightarrow} \partial\psi(A) = \psi(\partial A) \subseteq \psi(\overline{A})$ che è compatto $\Rightarrow \overline{\psi(A)} = \psi(A) \cup \partial\psi(A) \subseteq \psi(\overline{A}) \subseteq \tilde{\Omega}$.

Quindi dalle ipotesi su A seguono le stesse assunzioni su $\psi(A)$.
Basta quindi provare $A \in PJ \Rightarrow \psi(A) \in PJ$, la seconda implicazione ottenendosi sostituendo ψ^{-1} a ψ e $\psi(A)$ ad A.

- ∂A limitato $\Rightarrow \psi$ lipschitziana su un aperto che contiene ∂A $\Rightarrow m(\psi(\partial A)) = 0$
$\Rightarrow m(\partial\psi(A)) = 0 \Rightarrow \psi(A) \in PJ$.

Proposizione 6 ψ diffeomorfismo C^1 da Ω su $\tilde{\Omega}$; $\overline{A} \subseteq \Omega = \Omega^\circ$, A limitato:

$\Rightarrow$ $\psi(A)$ limitato, $\overline{\psi(A)} \subseteq \tilde{\Omega}$ e $[A \in PJ \Leftrightarrow \psi(A) \in PJ]$

DIMOSTRAZIONE Per la diseguaglianza del valor medio di Lagrange per funzioni vettoriali si ha che ψ e ψ^{-1} sono localmente lipschitziane.

Sia Ψ da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$

Lemma 7 $\Psi \in C^1(\Lambda, \mathbb{R}^n)$, con $d\Psi$ uniformemente continua; allora:

$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall B \subseteq \Lambda$ convesso, $\operatorname{diam} B \leq \delta$, $\forall x \in B, y \in B$ si ha

$$|\Psi(y) - \Psi(x) - d\Psi(x)(y-x)| \leq \varepsilon |x-y|$$

DIMOSTRAZIONE Dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall u, v \in \Lambda\ |u-v| \leq \delta \Rightarrow |d\Psi(u) - d\Psi(v)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

sia $B \subseteq \Lambda$ convesso con $\operatorname{diam} B \leq \delta$, $x \in B$, $y \in B$; si ha:

i. $\forall t \in [0;1]\quad (1-t)x + ty \in B \subseteq \Lambda \Rightarrow \Psi$ è definita su $(1-t)x+ty$; sia $g_i(t) = \Psi_i((1-t)x+ty)$

ii. $|\Psi(y) - \Psi(x) - d\Psi(x)(y-x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\Psi_i(y) - \Psi_i(x) - d\Psi_i(x)(x-y)|^2 = [\exists\, \tau_i \in]0;1[$ per il teorema di Lagrange applicato a ogni $g_i] \sum_{i=1}^{n} |(d\Psi_i((1-\tau_i)x + \tau_i y) - d\Psi_i(x))(x-y)|^2 \leq$

$\sum_{i=1}^{n} |d\Psi_i((1-\tau_i)x + \tau_i y) - d\Psi_i(x)|^2 \cdot |x-y|^2 \leq [|x-y| \leq \delta]\ \varepsilon^2 \cdot |x-y|^2.$

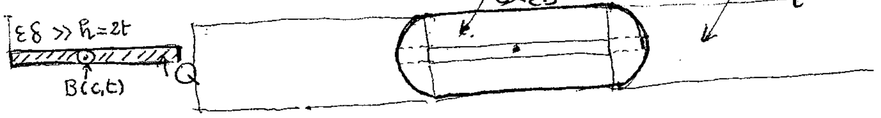
Osservazione 10 i. $\Psi(B) \subseteq \Psi(x) + (d\Psi(x)(B-x))_{\varepsilon\delta}$

Esercizio Q è convesso $\iff \forall s \geq 0, t \geq 0\quad sQ + tQ = (s+t)Q$ $*$

ii. Quindi se Q è convesso con parte interna $\boxed{B(c,t) \overset{**}{\subseteq} Q} \subseteq \Lambda$, $\operatorname{diam} Q \leq \delta$:

$$\boxed{Q_{\varepsilon\delta} = Q + B(0, \varepsilon\delta) = Q + B(c, \varepsilon\delta) - c = Q + \frac{\varepsilon\delta}{t} B(c,t) - c \overset{**}{\subseteq} Q + \frac{\varepsilon\delta}{t} Q - c \overset{*}{=} \subseteq \left(1 + \frac{\varepsilon\delta}{t}\right)Q - c}$$

e.g. h



iii. Quindi se $B, \Psi(B) \in \mathcal{PJ}$ e $B(c,t) \subseteq d\Psi(x)B$ (i.e. $(d\Psi(x) \cdot B)^\circ \neq \emptyset$)

$$(*)\qquad m(\Psi(B)) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon\delta}{t}\right)^n |\det d\Psi(x)|\, m(B)$$

Affinchè se B non è troppo allungato anche $d\Psi(x)B$ non lo sia, e t non sia "piccolo" in modo che la stima $(*)$ sia significativa (non come nell'esempio!) occorre $|\det d\Psi(x)| \neq 0$ e considerare $\delta < 2|\det d\Psi(x)|^{-1}$. Affinchè questo argomento sia uniforme non solo occorre $\forall x\ |\det d\Psi(x)|^{-1} \neq 0$ ma anche considerare convessi non troppo sbilanciati; per semplicità ipercubi.

Lemma 8 Sia Ψ c.c.r. su $\Omega = \Omega^\circ \supseteq \overline{\Lambda}$, Λ limitato; allora

$\forall \varepsilon\ \exists \rho\ \forall Q$ ipercubo, $\operatorname{diam} Q \leq \rho$, $Q \subseteq \overline{\Lambda}$, $\forall x \in Q$:

$$m(\Psi(Q)) \leq (1+\varepsilon)^n |\det d\Psi(x)|\, m(Q)$$

DIMOSTRAZIONE
Poichè $\overline{\Lambda} \times \{v \in \mathbb{R}^n : |v| = 1\}$ è compatto, $(x;v) \mapsto |d\Psi(x) \cdot v|$ ivi è continua: $\exists \min_{x \in \overline{\Lambda}} \min_{|v|=1} |d\Psi(x) \cdot v| =: 2t$.
Poichè Ψ è un diffeomorfismo $t \gneq 0$. In particolare: $\boxed{d\Psi(x)[0,1]^n \supseteq B(0;t)}$
Fissato ε sia δ ad esso relativo dato dal Lemma 7

$$m(\Psi(Q)) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon\delta}{t}\right)^n |\det d\Psi(x)|\, m(Q) \leq (1+\varepsilon)^n |\det d\Psi(x)|\, m(Q)$$

Lemma 9 $\quad \psi$ diffeomorfismo C^1 da Ω su $\tilde\Omega$, $\bar A \subseteq \Omega = \Omega^\circ$, $A \in PJ \Rightarrow$
$$m(\psi(A)) \leq \int_A |\det d\psi(x)|\,dx$$

DIMOSTRAZIONE. Grazie al lemma 4 ci si riduce al caso $m(A) \gneq 0$

- $\bar A$ discosto da $\partial\Omega$: $A \in PJ \Rightarrow A$ limitato $\Rightarrow \bar A$ compatto $\subseteq \Omega$ aperto $\Rightarrow \operatorname{dist}(\bar A, \partial\Omega) = \min = \rho \gneq 0$
  Vi è quindi Λ: $\bar A \subseteq \Lambda^\circ = \Lambda \subseteq \bar\Lambda \subseteq \Omega$, e $\bar\Lambda$ compatto (e.g. $\Lambda = \bar A + \mathring{B}(0, \rho/2)$)
- Fissato $\varepsilon > 0$ è possibile scegliere $\delta > 0$:
  1. $x, y \in \bar\Lambda$, $|x-y| < \delta \Rightarrow \big|\, |\det d\psi(x)| - |\det d\psi(y)| \,\big| \leq \varepsilon$ $\qquad$ ($|\det d\psi|$ u.c. su $\bar\Lambda$)
  11. $\forall Q = x + \delta[0,1]^n \subseteq \bar\Lambda \Rightarrow m(\psi(Q)) \leq (1+\varepsilon)^n |\det d\psi(x)|\, m(B)$ (lemma 8)
  111. $\exists\, Q_1 = x_1 + \delta[0,1]^n, \ldots, Q_N = x_N + \delta[0,1]^n$
  $Q_i^\circ \cap Q_j^\circ = \phi$, $\bar A \subseteq (\bigcup_{i=1}^N Q_i)^\circ \subseteq (\bigcup_{i=1}^N Q_i) \subseteq \Lambda$, $m(\bigcup_{i=1}^N Q_i \setminus A) \leq \varepsilon$ (corollario 2)
- Si rende rigorosa la catena di passaggi dell'osservazione 6 bis

$$m(\psi(A)) \leq m\Big(\bigcup^N \psi(Q_i)\Big) \leq \sum_{i=1}^N m(\psi(Q_i)) \underset{(11.)}{\leq} (1+\varepsilon)^n \sum_{i=1}^N |\det d\psi(x_i)|\, m(Q_i) = [Q_i^\circ \cap Q_j^\circ = \phi]$$
$$= (1+\varepsilon)^n \Big(\int_{\bigcup_{i=1}^N Q_i} |\det d\psi(x)|\,dx + \sum_{i=1}^N \int_{Q_i} \big(|\det d\psi(x_i)| - |\det d\psi(x)|\big)\,dx \Big) \underset{(1.)}{\leq}$$
$$\leq (1+\varepsilon)^n \quad '' \quad + (1+\varepsilon)^n \cdot \varepsilon \cdot m\Big(\bigcup_{i=1}^N Q_i\Big) \leq$$
$$\leq (1+\varepsilon)^n \int_A |\det d\psi(x)|\,dx + (1+\varepsilon)^n \int_{\bigcup Q_i \setminus A} |\det d\psi| + (1+\varepsilon)^n \varepsilon\, m\Big(\bigcup_{i=1}^N Q_i\Big) \underset{(111.)}{\leq}$$
$$\leq (1+\varepsilon)^n \int_A |\det d\psi| + (1+\varepsilon)^n \varepsilon \Big(\sup_{\bar\Lambda} |\det d\psi| + \varepsilon + m(A) \Big).$$

- Essendo $\varepsilon > 0$ si ha $m(\psi(A)) \leq \int_A |\det d\psi|$.

Proposizione 7 $\quad \psi$ diffeomorfismo C^1 da Ω su $\tilde\Omega$, f continua su $\tilde\Omega$, $\bar A \subseteq \Omega = \Omega^\circ$, $A \in PJ$; allora
$$\int_{\psi(A)} f(x)\,dx = \int_A f(\psi(x))\, |\det d\psi(x)|\,dx$$

DIMOSTRAZIONE

- Grazie al lemma 4 ci si riduce al caso $m(A) \gneq 0$
- Poiché $f = f^+ - f^-$; f^+, f^- continue non negative ci si riduce al caso $f \geq 0$.
- Per il lemma 6 sia $\tilde\Lambda$: $\overline{\psi(A)} \subseteq \tilde\Lambda^\circ = \tilde\Lambda \subseteq \bar{\tilde\Lambda} \subseteq \tilde\Omega$. Sia $\varepsilon > 0$:
  vi è σ semplice : $0 \leq \sigma \leq f \cdot 1_{\psi(A)}$, $\int_{\psi(A)} f \leq \int \sigma + \varepsilon$, $\sigma = \sum_{i=1}^N \lambda_i 1_{R_i}$, $\lambda_i \geq 0$, $\overline{\bigcup_{i=1}^N R_i} \subset \tilde\Lambda$

$$\int \sigma = \sum_{i=1}^N \lambda_i m(R_i) = \sum_{i=1}^N \lambda_i\, m(\psi(\psi^{-1}(R_i))) \leq [\lambda_i \geq 0, \text{Prop. } 6, \text{Lemma } 9] \sum_{i=1}^N \lambda_i \int_{\psi^{-1}(R_i)} |\det d\psi| =$$
$$= \int \sigma \circ \psi\, |\det d\psi| \leq \int (f \cdot 1_A) \circ \psi\, |\det d\psi| = \int_A f \circ \psi\, |\det d\psi| \Rightarrow \forall \varepsilon \;\; \int_{\psi(A)} f \leq \int_A f \circ \psi\, |\det d\psi| + \varepsilon$$

- Scambiando Ω con $\tilde\Omega$, ψ con ψ^{-1}, A con $\psi(A)$, f con $f \circ \psi\, |\det d\psi|$
  per la proposizione 6 le ipotesi sono soddisfatte, considerando che
  $|\det (d\psi) \circ \psi^{-1}| = |\det d(\psi^{-1})|^{-1}$ si ottiene l'altra disuguaglianza.

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 5/5bis

- Ci si può ridurre all'implicazione $f \in$ Riem.int $\tilde{\Omega} \Rightarrow f\circ\psi|\det d\psi|$ Riem.int. Ω grazie alla proposizione 6 e alla simmetria delle ipotesi
- Ci si può ridurre al caso $f \geq 0$, essendo $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, $\varphi \in$ Riem.int $\Leftrightarrow \varphi^+$ e φ^- Riem.int.
- Sia $\Lambda : \overline{\{f \neq 0\}} \subseteq \Lambda^\circ \subseteq \overline{\Lambda} \subseteq \tilde{\Omega}$, Λ limitato : Poiché $f \geq 0$ è Riem.int.
  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \sigma_1 = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i 1_{R_i}$, $\sigma_2 = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i 1_{Q_i}$ funzioni semplici "
  $0 \leq \sigma_1 \leq f \leq \sigma_2$, $\int f - \int \sigma_1 \leq \varepsilon$, $\int \sigma_2 - \int f \leq \varepsilon$, $\overline{\cup R_i \cup \cup Q_i} \subseteq \Lambda = \Lambda^\circ$
- $$\sigma_1 \circ \psi|\det d\psi| = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i 1_{R_i} \circ \psi |\det d\psi| \leq f\circ\psi|\det d\psi| \leq \sum_{i=1}^{N} \gamma_i 1_{Q_i} \circ \psi |\det d\psi| = \sigma_2 \circ \psi |\det d\psi|$$

- Grazie alle proposizione 6 e alle proprietà di algebra delle Riemann integrabili: $\sigma_i \circ \psi |\det d\psi|$ sono Riemann integrabili:
- Per la proposizione 7 e la linearità dell'integrale:
  $\int \sigma_1 \circ \psi |\det d\psi| = \sum \lambda_i \int_{\psi^{-1}(R_i)} |\det d\psi| = \sum \lambda_i\, m(R_i) = \int \sigma_1$, analogamente
  $\int \sigma_2 \circ \psi |\det d\psi| = \int \sigma_2$
  Inoltre $\left| \int \sigma_1 \circ \psi |\det d\psi| - \int \sigma_2 \circ \psi |\det d\psi| \right| \leq 2\varepsilon$.
- Si ottiene così la Riemann integrabilità di $f\circ\psi |\det d\psi|$.
  Poiché inoltre $\left| \int \sigma_i \circ \psi |\det d\psi| - \int f \right| \leq \varepsilon$ si ottiene la formula

—