Calcolo Differenziale e Integrazione, Anno Accademico 2001-2002, Matematica

Guasoni, Modica, Tortorelli

VI foglio di esercizi
dal 18 dicembre 2001 al 21 gennaio 2002

ESERCIZIO n. 1 Trovare i punti ed i valori di massimo relativo e minimo relativo delle seguenti funzioni sui domini rispettivamente specificati:

$$f(x,y) = \frac{x^4+2x^3y}{x^4+y^4}\ ,\quad y-x^2=0\ ;\quad f(x,y)=\sin((x-2)^2+y^2)\ ,\quad (1-x)^3+y^2=0\ ;$$

$$f(x,y) = x^2+6xy+3y^2\ ,\quad x^2+y^2-2xy = \frac{1}{(x+y-2)^2}\ ;$$

$$f(x,y,z) = e^{-(x^2-y+z^2)}\ ,\quad \frac{x^2}{4}+y^2+3z^2 \le 1\ ,\ (Ex.C.P.S.29.14,\ 278)\ ;$$

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2\ ,\quad \begin{cases} (z+1)^2-y^2-(x+3)^2=0 \\ z^2+y^2-(x+1)^2=0 \\ z>-3 \end{cases}\ ;$$

$$f(x,y,z) = (x+1)^2+(y-\varepsilon)^2+z\ ,\quad \begin{cases} (1-x)z=(1+x)y \\ z^2+y^2-(x+1)^2=0 \\ z>-3 \end{cases}\ ;$$

$f(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2$, tetraedro di vertici $(-1,-1,-1),\ (1,-1,-1),\ (0,1,-1),$ $(0,0,1)$ $(Ex.C.P.S.R4.3,\ 278)$;

$$f(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2\ ,\quad \max\{|x+2|,|y+3|,|z+4|\}=1\ ;$$

$$f(x,y,z,w) = x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}+\frac{w^2}{4},\quad \begin{cases} (x+y+z+w)^2+(x-y+z-w)^2=1 \\ (x-y-z+w)^2+(x-y-z-w)^2=1 \end{cases}$$

(*) ESERCIZIO n. 2 È vero che il minimo valore di $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2$ su $(x-R)^2+(y-R)^2 = 2R^2$ è sempre 0? Giustificare la risposta.

ESERCIZIO n. 3
a) Trovare il massimo volume di un parallelepipedo rettangolo inscritto nell'elissoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.
b) Trovare l'elissoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ di volume massimo per cui $a+b+c=M$, $a,\ b,\ c>0$.
c) Trovare la minima distanza tra gli insiemi $\{x^2+y^2=1\} \cap \{yz=xz\}$ e $\{z-y=0\} \cap \{x+y+z=1\}$.

ESERCIZIO n.4 Sia $\mathbf{O}$ l'insieme delle matrici ortogonali $n \times n$, e sia $f : \mathbf{O} \mapsto \mathbf{R}$ definita da $f(A) = \mathrm{tr}\ A$. Si dimostri che esistono unici e si calcolino il massimo e il minimo di f.

ESERCIZIO n.5 Si identifichi lo spazio M delle matrici $n \times n$ con $\mathbf{R}^{n^2}$, ordinando in modo lessicografico gli elementi delle matrici.
a) Sia $t \mapsto A(t)$ una funzione regolare da $]-1;1[$ in M tale che $A(0) = A$ e $A'(0) = I$, ove I è la matrice dell'identità. Si trovi lo sviluppo di Taylor del primo ordine di $\det A(t)$ in $t = 0$.
b) Se $\Sigma = \{\det(A) = 1\}$ si provi che i vettori $X \in M$ tangenti ad $A \in \Sigma$ sono quelli per cui $\mathrm{tr}\, A^{-1}X = 0$.
c) Si consideri la funzione $f : \mathbf{M} \mapsto \mathbf{R}$ definita da $f(A) = \det A$. Si dimostri che il gradiente di f in A, se $f(A) \neq 0$, è dato da:

$$\nabla f(A) = \det A \, ({}^t A)^{-1},$$

dove ${}^t A$ indica la trasposta di A.

ESERCIZIO n.6 Si studi la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni e serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-e^{-\frac{1}{(x-n)^2+(y-\sqrt{n})^2}}) \; ; \; f_n(x,y) = \frac{1}{x^n + y^n + ny} \; , \; x, \, y > 0 \; ; \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-y|^n}{n!} \log(n+x^2+y^2).$$

ESERCIZIO n.7 Dato un vettore $x = (x_1, \dots x_n)$, tale che $x_i > 0$ per ogni i e $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, si definisce $H(x) = -\sum_{i=1}^n x_i \log x_i$. Determinare:

a) Il vettore che massimizza H.
b) Il vettore che massimizza H sotto il vincolo $\sum_{i=1}^n x_i y_i = c$, dove $y = (y_1, \dots y_n)$ è un vettore qualsiasi.

ESERCIZIO n.8 In un mercato oligopolistico ci sono n aziende che producono lo stesso bene, ognuna in quantità y_i. Il prezzo p del bene dipende dalla quantità totale prodotta $\sum_{i=1}^n y_i$. Ogni azienda decide di produrre la quantità y_i che massimizza il proprio profitto:

$$f_i(y_i) = p\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) y_i - cy$$

dove c è il costo unitario di produzione del bene.
Determinare in quali condizioni il mercato è in equilibrio (ogni azienda, cioè, non intende modificare la propria produzione y_i).
Dimostrare che per $n \to \infty$ il prezzo di equilibrio p converge a c.

ESERCIZIO n.9
a) Si calcoli la derivata $\frac{dy}{dx}$ nei seguenti casi:

$$x^3y - y^3x = a^2 \; , \quad \sin xy - e^{xy} - x^2y = 0 \; , \quad x^y = y^x \; .$$

b) Si calcolino le derivate specificate per le seguenti relazioni:

$$\frac{x^2}{a^2}+y^2b^2+z^2c^2=1:\ \frac{\partial z}{\partial x}\ ;\quad z^3+3xyz=a^3:\ \frac{\partial z}{\partial x}\ ;\quad e^z-xy^2z=0:\ \frac{\partial z}{\partial y}.$$

ESERCIZIO n.10
a) Sia $f(x,y)=\binom{x^2-y^2}{2xy}=(u,v)$: si studi l'immagine di f, si studi al variare di (u,v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$. Si determini le regioni ove il differenziale è invertibile e quindi le regioni ove la funzione è invertibile.
b) Identificando il piano complesso $\mathbf{C}$ con $\mathbf{R}^2$, $z=x+iy\sim(x,y)$, si considerino $f(z)=z^n$, $n\in\mathbf{N}$ e $g(z)=e^z$ come funzioni di due variabili. Se ne studino le immagini e come sono fatte le fibre $f^{-1}\{w\}$, $g^{-1}\{w\}$. Si determini le regioni ove i differenziali sono invertibili e quindi le regioni ove le funzioni sono invertibili.

ESERCIZIO n.11
a) Sia $f(x,y)=\binom{x^2}{y}$, $g(x,y)=\binom{x^3+xy}{y}$: se ne studino le immagini. Si studino le immagini delle regioni ove i differenziali non sono invertibili e come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$, $g^{-1}\{(u,v)\}$.
b) Sia $f(x,y)=\binom{e^{x+y}-e^{x-y}-k^2x}{x+y}=(u,v)$, $k\in\mathbf{R}$: si studi l'immagine di f e al variare di (u,v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$. Si determini un intorno di $(x,y)=(0,0)$ in cui f é iniettiva, ed quindi si calcolino (relativamente a tale intorno) $\frac{\partial x}{\partial u}(0,0)$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}(0,0)$.
c) Sia $f:\mathbf{R}^5\to\mathbf{R}^2$ $f(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)=\binom{2e^{x_1}+x_2y_1-4y_2+3}{x_2\cos x_1-6x_1+2y_1-y_3}$: si verifichi che in un intorno di $(0,1,3,2,7)$ la regione determinata dalle equazioni $f=(0,0)$ é un grafico rispetto alle variabili (y_1,y_2,y_3) e si calcoli $\frac{\partial x_1}{\partial y_2}(3,2,7)$. É possibile esplicitare (x_1,x_2) in funzione di (y_1,y_2,y_3) in ogni punto di $\{f=(0,0)\}$?

ESERCIZIO n.12
a) Sia $f(x,y)=\binom{x^2-y^2}{xy}=(u,v)$: si trovi un intorno di $P_0=(1,1)$ in cui f é iniettiva.
b) Si determini lo sviluppo di Taylor al secondo ordine, centrato in $U_0=(0,1)=f(1,1)$, dell'inversa della funzione f ristretta a tale intorno.
(*) c) Dato U si consideri la successione di vettori $P_{n+1}=df^{-1}(U_0)(U-f(P_n))+P_n=:G(P_n)$. Si trovino α e δ per cui se $|U-U_0|\le\alpha$ la funzione G risulti una contrazione della palla chiusa di centro P_0 e raggio δ in se stessa. Si calcoli per tali U il limite di $f(P_n)$ per $n\to\infty$. Si calcoli P_2 nel caso in esame.

ESERCIZIO n.13 Si provi che se $\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$ è un aperto connesso ed $f:\Omega\to\mathbf{R}$ è tale che $\nabla f(x)=0$ in ogni $x\in\Omega$ allora f è costante.

ESERCIZIO n.14 Si ricorda che $C \subseteq \mathbf{R}^n$ è detto convesso se contine interamente i segmenti delimitati dai suoi punti: se $x \in C$, $y \in C$ e $\lambda \in [0;1]$ allora $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. Una funzione $f : C \to \mathbf{R}$ si dice convessa se C è convesso e se $\lambda \in [0;1]$ allora $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

a) Sia Ω un aperto convesso di $\mathbf{R}^n$, e sia $f : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile. Dimostrare che f è convessa se e solo se, per ogni $x, y \in \Omega$:

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rappresenta il prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$.

b) Nelle stesse ipotesi si deduca che f è convessa se e solo se il suo grafico sta sopra ogni piano tangente ad esso.

c) Se poi f è C^2 si provi che f è convessa se e solo se $Hf(x)$ è definita non negativa in ogni punto.

ESERCIZIO n.15

a) Sia $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una funzione strettamente convessa, ove Ω è un aperto convesso. Si dimostri che f ha al più un estremale interno a Ω. Nel caso si tratterebbe di un massimo o di un minimo?

b) Utilizzando il fatto che una funzione convessa a valori reali, definita su un chiuso C limitato convesso è continua si provi che se $C = \bar{\Omega}$, con Ω aperto convesso, allora il massimo di f è assunto su $\partial\Omega$.

ESERCIZIO n. 16 Si trovino tutte le soluzioni $(x, y) \mapsto u(x, y)$ delle seguenti equazioni differenziali alle derivate parziali:

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0\ , \quad e^{-x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0\ , \quad e^{y}\frac{\partial u}{\partial x} + 2x\frac{\partial u}{\partial y} = 0\ , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$$

ESERCIZIO n. 17 Si risolva, al variare del parametro α, l'equazione:

$$(y + \alpha x)\frac{\partial u}{\partial x} - (x + \alpha y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

ESERCIZIO n. 18

a) - Se $u \in C^2(\mathbf{R}^n)$ e $\triangle u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} > 0$ allora u non ha punti di massimo locale.

- Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, Ω aperto limitato, se $\triangle u \geq 0$ allora $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

(Si consideri x_0 di massimo su $\bar{\Omega}$ di u e $v(x) = u(x) + \varepsilon|x - x_0|^2$. Si applichi il precedente punto a v.)

- Si deduca che se $\triangle u \geq 0$ allora u non ha punti di massimo locale stretto.

b) - Si provi che se Ω é un aperto limitato, $f \in C(\mathbf{R}^n)$, $g \in C(\mathbf{R}^n)$ allora vi é *al piú una* funzione u definita su $\overline{\Omega}$ che risolve:

$$\begin{cases} \triangle u(x) \;=\; f(x) & x \in \Omega \\ \\ u(x) \;=\; g(x) & x \in \partial\Omega \\ \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \end{cases}$$

- Si provi che per questa eventuale soluzione si ha:

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \;\leq\; \max_{\partial\Omega} |g| \;+\; \frac{(\mathrm{diam}\Omega)^2}{2n} \max_{\overline{\Omega}} |f|.$$

NOTA: Si puó provare:
- se Ω é un connesso aperto, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\triangle u \geq 0$, allora se u assume massimo in $\overline{\Omega}$ allora lo assume **solo** sul bordo $\partial\Omega$ oppure u é costante.
- se Ω é un connesso aperto, $u \in C^2(\Omega)$, $\triangle u = 0$, allora u non assume ne massimi ne minimi locali interni in Ω a meno che non sia costante.

ESERCIZIO n. 19 Utilizzando quanto dimostrato nel precedente esercizio si trovino tutte le soluzioni delle equazioni:

$$\begin{cases} \triangle u(x,y) \;=\; 0 & x^2+y^2<1 \\ \\ u(x,y) \;=\; \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^2 & x^2+y^2=1 \\ \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) & \Omega = \{x^2+y^2<1\} \end{cases} \qquad \begin{cases} \triangle u(x,y) \;=\; 0 & \max\{|x|,|y|\} < \pi \\ \\ u(x,y) \;=\; \sin x \cos y & \max\{|x|,|y|\} = \pi \\ \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) & \Omega = \{\max\{|x|,|y|\} < \pi\} \end{cases}$$