Calcolo Differenziale e Integrazione, Anno Accademico 2001-2002, Matematica

Guasoni, Modica, Tortorelli

V foglio di esercizi
dal 3 al 17 dicembre

ESERCIZIO 1 Sia $f \in C^1(I)$, con I aperto. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

i) f é positivamente omogenea di grado α (i.e. $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $x \in I$).

ii) $\alpha f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_{x_i}(x)$ per ogni $x \in I$.

ESERCIZIO 2 Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ differenziabile ovunque e sia $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da:

$$F(\rho, \theta) = f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$$

Verificare che:

$$(F_\rho(\rho,\theta))^2 + \frac{1}{\rho^2}(F_\theta(\rho,\theta))^2 = (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2$$

dove $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$.

ESERCIZIO 3 Sia $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ differenziabile ovunque e sia x_0 tale che $\nabla f(x_0) \neq 0$. Dimostrare che la direzione u rispetto a cui:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0} = \max\left\{ \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{x_0} \ : \ v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1 \right\}$$

è data da $u = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$.

ESERCIZIO 4 Sia $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ una rotazione, cioè una applicazione lineare del tipo $x \mapsto Rx$, con

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Detto $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, dimostrare che:

$$\Delta(u \circ R) = (\Delta u) \circ R$$

per ogni $u \in C^2$.

ESERCIZIO 5 Sia $g = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Dato il cambio di coordinate $(u, v) = (x, \frac{x}{\sqrt{y}})$, esprimere $g(x, y)$ in funzione di u e v .

ESERCIZIO 6 Determinare i punti critici delle seguenti funzioni:

i) $x^3 + (x - y)^2$
ii) $x^4 + (x - y)^2$
iii) $xy + y^2 - 3x$
iv) $\sin(x + y)$
v) $x^2 - \sin y$
vi) $x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$

ESERCIZIO 7 Si dica se $(0, 0)$ è di massimo, di minimo, o di sella per ciascuna delle seguenti funzioni:

i) $x^4 + y^4$
ii) $x^4 - y^4$
iii) $1 - x^4 - x^2y^2 - y^4$

ESERCIZIO 8 Determinare minimo e massimo delle seguenti funzioni nei rispettivi insiemi:

i) xy su $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$
ii) $x^2 + y^2 - (x + y)$ su $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$
iii)
$$\int_{\sqrt{\log(1+y^4)}}^{x^2} e^{t^2} dt \qquad \text{su} \qquad \{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$
iv)
$$\begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+4y^2} + x & \text{per } xy > 0 \\ xy + x & \text{per } xy \leq 0 \end{cases} \qquad \text{su} \qquad \{0 \leq y \leq 1, y^2 - 1 \leq x \leq 1\}$$

ESERCIZIO 9 Sia $f(x, y) = 2x^4 - x^2 e^y + e^{4y}$. Si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di tale funzione e se ne calcoli il limite per $x^2 + y^2 \to +\infty$. Si osservi che vi sono solo due punti di minimo assoluto e nessun altro punto critico. Si traccino approssimativamente le linee di livello $f = c$, al variare di c in $\mathbb{R}$, mettendo in risalto quali sono connesse, quali sono limitate.

ESERCIZIO 10 Sia data un insieme di soppie $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$. Determinare a e b in modo tale che la funzione:
$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2$$
sia minima. Il minimo è assoluto o relativo?