Calcolo Differenziale e Integrazione, Anno Accademico 2001-2002, Matematica

Guasoni, Modica, Tortorelli

IV foglio di esercizi
dal 5 novembre al 16 novembre 2001

ESERCIZIO n. 1 Si disegnino in maniera approssimativa i sottoinsiemi dal piano definiti da $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ f(x,y) = f(a,b)\ \}$ al variare di f e di (a,b), nei casi seguenti:

$x^2 - y^2$, $(2,-1)$; $y^3 - x^2$, $(0,0)$; $(y - x^2)^2 - x^5$, $(0,0)$; $\frac{x-y}{x+y}$, $(1,1)$; $\cos\frac{x}{y}$, $(\pi, 4)$;

e^{xy}, $(2,0)$; $\frac{x}{x^2+y^2}$, $(1,2)$; $|x| + |y|$, $(1,0)$; $\max\{|x|,|y|\}$, $(1,0)$; $|x|^p + |y|^p$, $p \in \mathbf{R}^+$, $(1,0)$;

$x^3 + y^3 - 3axy$, $a > 0$, $(0,0)$; $\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $(\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in \mathbf{R}$.

ESERCIZIO n. 2 Si disegnino in modo approssimativo i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$:

$\{(x,y,z): \ 2 = 3x + 5y + 7z\}$;
$\{(x,y,z): \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 121\}$; $\{(x,y,z): \ (2x-10)^2 + 9y^2 + z^2 \geq 111\}$;
$\{(x,y,z): \ x = z^2 + y^2\}$; $\{(x,y,z): \ x + y + z = 2x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4zx - 4zy\}$;
$\{(x,y,z): x^2 - y^2 = z\}$; $\{(x,y,z): x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}$; $\{(x,y,z): x^2 + y^2 - z^2 \leq -1\}$;
$\{(x,y,z): \ x^2 - 4y^2 = 9z^2\}$; $\{(x,y,z): \ 2z^2 = x^2 + y^2\}$;
$\{(x,y,z): \ x^2 + y^2 + z^2 - 6\sqrt{x^2+y^2} + 5 = 0\}$;
$\{(x,y,z): \ |x| + |y| + |z| = 1\}$; $\{(x,y,z): \ \max\{|x|,|y|,|z|\} \leq 1\ \}$;
$\{(x,y,z): \ z > -3, \ z^2 + y^2 - (x+1)^2 = 0, \ (z+1)^2 - y^2 - (x+3)^2 = 0\}$;
$\{(x,y,z): y\tan z = x\}$; $\{(x,y,z): e^z \cos y = \cos x\}$; $\{(x,y,z): \sqrt{x^2+y^2} = \cosh z\}$.

ESERCIZIO n. 3 Se $f(x,y) = x^{x^{x^y}} + \log x(\operatorname{artan}(\operatorname{artan}(\operatorname{artan}(\sin(\cos(xy) + \log(x+y))))))$, si calcoli $\frac{\partial f}{\partial y}(1,y)$.

ESERCIZIO n.4 Si studino la continuità, la derivabilità nelle diverse direzioni, e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

$\sqrt{|xy|}$; $\sqrt{|x|}\cos y$; $\int_0^y f(t,x)dt$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$;

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}; \quad f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases};$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^3}e^{-\frac{y^2}{x^4}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

ESERCIZIO n. 5 Si studi l'esistenza dei limiti nei domini delle seguenti funzioni, al variare di eventuali parametri, e quando possibile se ne calcoli il valore:

$\frac{xy}{x^2+y^2}$; $\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$; $x^2\log(x^2+y^2)$; $\frac{x\sin y}{y\sin x}$; $\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$; $\frac{\sin(x|y|)}{x^2+|y|}$; $\frac{e^{x^2y}-x\sin(xy)-1}{(x^2+y^2)^2}$: $(x,y)\to(0,0)$;

$\frac{x+y}{3x+2y}$; $\frac{x^3+y^2}{x^2y^2}$; $\frac{x^3+y^2}{x^3+y^3}$; $\frac{y^2+x+y}{x^2+x+y}$; $\frac{x^2y^2}{|x|^\alpha+|y|^\alpha}$; $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$: $(x,y)\to(0,0)$, $\alpha>0$, P, Q polinomi nulli in (0,0);

$\frac{y}{x^2-y}$: $(x,y)\to(0,0)$; $\frac{y}{x^2-y}$: $(x,y)\underset{|y|\le|x|}{\to}(0,0)$;

$x-y^2$: $x^2+y^2\to\infty$; $x-y^2$: $x^2+y^2\underset{2y^2\le x}{\to}\infty$; $\frac{x^2+y}{x^2+y^2+2xy}$: $x^2+y^2\to\infty$;

$(*)\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^4}$, $\frac{x^\alpha+y^\beta}{x^2+y^4}$: $(x,y)\to(0,0)$, $\alpha,\ \beta>0$.

ESERCIZIO n. 6 Tra le seguenti implicazioni si provino quelle valide e si trovi un controesempio per ognuna di quelle false:

1. $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \implies \exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$.
2. $\exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \implies \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.
3. $\begin{cases} \exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lambda_1 \\ \exists \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lambda_2 \\ \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lambda_3 \end{cases} \implies \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3.$

ESERCIZIO n.7 Qual'è la massima distanza del pumto $(3,5,7)$ dai punti dell'insime $\{(x,y,z):\ |x|+|y|+|z|\le 1\}$? E dall'insieme $\{(x,y,z):\ (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1\}$?

ESERCIZIO n. 8 (a) Si trovi il piano tangente alla sfera di centro $(1,1,1)$ e raggio 1 in $(1,\frac{1}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2})$.
(b) Si trovi la retta ortogonale alla regione $\{(x,y,z):\ \log(x^2+y^2+e)=e^z\}$ in $(0,0,1)$.

ESERCIZIO n. 9 Si calcoli l'angolo di incidenza che formano le seguenti coppie di regioni dello spazio incontrandosi nei punti rispettivamente indicati:

$\{(x,y,z):\ 2x^4+3y^3-4z^2=-4\}$, $\{(x,y,z):\ 1+x^2+y^2=z^2\}$, $(0,0,1)$;
$\{(x,y,z): x^2+y^2=e^z\}$, $\{(x,y,z): x^2+z^2=e^y\}$, $(1,0,0)$;
$\{(x,y,z):\ xy=z\ \}$, $\{(x,y,z):\ \cos(2\pi xy)=z\}$, $(1,1,1)$.

ESERCIZIO n.10 Dato $C\subseteq\mathbf{R}^2$ si definisce la funzione distanza da C come segue:

$$d_C(x,y)\ =\ \inf_{(a,b)\in C}\sqrt{|x-a|^2+|y-b|^2}$$

Si descrivano, nei seguenti casi, le regioni del piano ove d_C é differenziabile:
(a) $C=\{(0,0)\}$; (b) $C=\{(-1,0),(0,1)\}$; (c) $C=\{(-1,0)\}\cup\{(1,b):b\in\mathbf{R}\}$; (d) $C=\{(-1,0)\}\cup\{(a,b):(a+1)^2+b^2=1\}$.

ESERCIZIO n. 11 (a) La funzione $f(x,y)=\binom{x-yx}{2xy}$ da $\mathbf{R}^2$ in se è iniettiva? È surgettiva?

(b) Sia $f(x,y)=\binom{x^2+y^2}{2xy}=(u,v)$: si studi l'immagine di f, si studi al variare di (u,v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$.