Calcolo Differenziale e Integrazione, Anno Accademico 2001-2002, Matematica

Guasoni, Modica, Tortorelli

III foglio di compendio alla teoria

lezione del 10 dicembre 2001: appunti dattiloscritti da Andrea Carpignani e Vincenzo M. Tortorelli

---

Notazioni. Per $x \in \mathbb{R}^n$ si pone $x = (\hat{x}, y)$ con $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $y \in \mathbb{R}$. Con $B(z_0, R)$ si indica la palla di $\mathbb{R}^{n-1}$: $\{z \in \mathbb{R}^{n-1} : |z - z_0| < R\}$, e con $C(x_0, R, r)$ il cilindro di $\mathbb{R}^n$: $\{(\hat{x}, y) \in \mathbb{R}^n : \hat{x} \in B(\hat{x}_0, R),\ |y - y_0| < r\}$.

Teorema (Dini). *Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto e f di classe C^1, $\Gamma = \{x \in A : f(x) = 0\}$, $x_0 \in \Gamma$. Se $D_n f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$, allora esistono $R > 0$, $r > 0$, e $\varphi : B(\hat{x}_0, R) \to \mathbb{R}$ tali che:*

$$\Gamma \cap C(x_0, R, r) = \{x = (\hat{x}, y) \in \mathbb{R}^n : \hat{x} \in B(\hat{x}_0, R),\ y = \varphi(\hat{x})\} \tag{1}$$

ovvero in $C(x_0, R, r)$ il luogo di zeri di f coincide con il grafico di una funzione. Inoltre

$$\varphi \in C^1\left(B(\hat{x}_0, R)\right) \tag{2}$$

$$(D_i\varphi)(\hat{x}) = -\frac{D_i f(\hat{x}, \varphi(\hat{x}))}{D_n f(\hat{x}, \varphi(\hat{x}))} \tag{3}$$

Dimostrazione: Si supponga $D_n f(x_0) > 0$ e si ponga $m = D_n f(x_0) > 0$, $k = |\nabla f(x_0)| > 0$. Nel caso $D_n f(x_0) < 0$ la dimostrazione è analoga.

Essendo f di classe C^1 esistono (per la continuità di ∇f e il teorema della permanenza del segno) $R' > 0$ e $r > 0$ tali che $D_n f(x) \geq \frac{m}{2}$, $|\nabla f(x)| \leq 2k$ per ogni $x \in C(x_0, R', r)$.

1) Proviamo il primo asserto:

i) Si consideri la funzione: $\psi(t) = f(\hat{x}_0, y_0 + t)$, $|t| < r$, la restrizione di f sulla fibra verticale sopra $\hat{x}_0$.
Si ha: $\psi(0) = f(x_0) = 0$, $\psi'(t) = D_n f(\hat{x}_0, y_0 + t) \geq \frac{m}{2} > 0$. Ne segue che:

$$\psi(r) = f(\hat{x}_0, y_0 + r) = \int_0^r \psi'(t)\,dt \geq \frac{mr}{2} > 0, \text{ ed analogamente } \psi(-r) \leq -\frac{mr}{2} < 0.$$

ii) Per permanenza del segno vi sono $R'' > 0$ ed $R''' > 0$ tali che: $\begin{cases} f(\hat{x}, y_0 + r) \geq \frac{mr}{4} & \hat{x} \in B(\hat{x}_0, R''), \\ f(\hat{x}, y_0 - r) \leq -\frac{mr}{4} & \hat{x} \in B(\hat{x}_0, R''') \end{cases}$

Sia $R = \min\{R', R'', R'''\}$. Fissiamo $\hat{x} \in B(\hat{x}_0, R)$ e poniamo: $\psi(t) = f(\hat{x}, y_0 + t)$, $|t| < r$.

Quindi si ha: $\psi(r) \geq \frac{mr}{4} > 0$, $\psi(-r) \leq -\frac{mr}{4} < 0$. Inoltre $\psi'(t) = D_n f(\hat{x}, y_0 + t) \geq \frac{m}{2} > 0$.

iii) Essendo ψ continua per il teorema degli zeri esiste $\bar{t} \in]-r; r[$ tale che $\psi(\bar{t}) = 0$.
Essendo iniettiva (poichè strettamente crescente) tale zero è unico. Quindi si è provato che:

$$\forall\, \hat{x} \in B(\hat{x}_0, R) \quad \exists!\, \bar{t} \in]-r, r[: \quad f(\hat{x}, y_0 + \bar{t}) = 0.$$

Poichè $\bar{t}$ dipende da $\hat{x}$ quando questo varia in $B(\hat{x}_0, R)$, si è quindi definita $\varphi(\hat{x}) = y_0 + \bar{t}$, ovvero una funzione:

$$\varphi : B(\hat{x}_0, R) \to]y_0 - r; y_0 + r[\qquad \text{tale che} \qquad f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) = 0.$$

Quindi il grafico di φ su $B(\hat{x}_0, R)$ è contenuto in $C(x_0, R, r) \cap \Gamma$.

iv) Viceversa si consideri $x = (\hat{x}, y) \in C(x_0, R, r) \cap \Gamma$, cioè $f(\hat{x}, y) = 0$. Si ha: $\hat{x} \in B(\hat{x}_0, R)$.
Per tali $\hat{x}$ ed y: $\psi(y - y_0) = f(\hat{x}, y_0 + (y - y_0)) = 0$. Per iniettività di ψ si ha $y - y_0 = \bar{t}$ cioè $y = \varphi(\hat{x})$.
Concludendo si è provato che $C(x_0, R, r) \cap \Gamma$ coincide con il grafico di φ su $B(\hat{x}_0, R)$.

$$\Gamma \cap C(x_0, R, r) = \text{grafico di } \varphi = \{(\hat{x}, y) : \hat{x} \in B(\hat{x}_0, R),\ y = \varphi(\hat{x})\}$$

2) Proviamo i rimanenti asserti:

i) Siano $x_1 = (\hat{x}_1, y_1)$, $x_2 = (\hat{x}_2, y_2) \in C(x_0, R, r) \cap \Gamma$. Si ha: $y_1 = \varphi(\hat{x}_1)$, $y_2 = \varphi(\hat{x}_2)$, $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Si consideri la funzione $\psi(t) = f(tx_1 + (1-t)x_2) = f(t\,\hat{x}_1 + (1-t)\,\hat{x}_2, ty_1 + (1-t)y_2)$, $0 \le t \le 1$ (f ristretta al segmento tra x_1 ed x_2).
Essendo ψ di classe C^1 si può applicare il teorema di Lagrange: si deduce che esiste $\tau \in]0,1[$ tale che

$$\begin{aligned}
\psi(1) - \psi(0) &= \psi'(\tau)(1-0) = \psi'(\tau) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (D_i f)(\tau\,\hat{x}_1 + (1-\tau)\,\hat{x}_2, \tau y_1 + (1-\tau)y_2)(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)_i + \\
&\quad + (D_n f)(\tau\,\hat{x}_1 + (1-\tau)\,\hat{x}_2, \tau y_1 + (1-\tau)y_2)(y_1 - y_2) = \\
&= \hat{\nabla} f(\tau x_1 + (1-\tau)x_2) \cdot (\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + [D_n f(\tau x_1 + (1-\tau)x_2)](y_1 - y_2) = \\
&= \hat{\nabla} f(\xi, \eta) \cdot (\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + [D_n f(\xi, \eta)](y_1 - y_2),
\end{aligned}$$

Si è usata la seguente notazione: $\hat{\nabla}$ è il gradiente rispetto alle variabili $\hat{x}$, $\xi = \tau\,\hat{x}_1 + (1-\tau)\,\hat{x}_2 \in B(\hat{x}_0, R)$, $\eta = \tau y_1 + (1-\tau)y_2 \in]y_0 - r; y_0 + r[$. Quindi $(\xi, \eta) \in C(x_0, R, r)$.

ii) Essendo $0 = f(x_1) - f(x_2) = \psi(1) - \psi(0)$, poichè $y_1 = \varphi(\hat{x}_1)$, $y_2 = \varphi(\hat{x}_2)$, $D_n f(x) \ge \frac{m}{2} > 0$ per $x \in C(x_0, R, r)$, ne segue:

$$\hat{\nabla} f(\xi, \eta) \cdot (\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + [D_n f(\xi, \eta)](y_1 - y_2) = 0\ , \qquad \varphi(\hat{x}_1) - \varphi(\hat{x}_2) = \frac{\hat{\nabla} f(\xi, \eta) \cdot (\hat{x}_1 - \hat{x}_2)}{D_n f(\xi, \eta)} \tag{4}$$

iii) Siccome, per la diseguaglianza di Schwarz, il valore assoluto del prodotto scalare è minore eguale al prodotto dei moduli, si ha la seguente stima:

$$|\varphi(\hat{x}_1) - \varphi(\hat{x}_2)| \le \frac{|\hat{\nabla}(\xi, \eta)|\,|\,\hat{x}_1 - \hat{x}_2\,|}{|D_n f(\xi, \eta)|} \le \frac{2k}{\frac{m}{2}}|\,\hat{x}_1 - \hat{x}_2\,| \le \frac{4k}{m}|\,\hat{x}_1 - \hat{x}_2\,|. \tag{5}$$

In particolare φ è lipschitziana e dunque continua.

iv) Si prova ora che esiste $D_i \varphi(\hat{x})$, per $\hat{x} \in B(\hat{x}_0, R)$, $i = 1, \cdots, n-1$.
Posto $\hat{x}_1 = \hat{x} + te_i$ e $\hat{x}_2 = \hat{x}$ si calcola:

$$D_i \varphi(\hat{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(\hat{x} + te_i) - \varphi(\hat{x})}{t} = \lim_{t \to 0} \left(-\frac{\hat{\nabla} f(\xi_t, \eta_t) \cdot te_i}{tD_n f(\xi_t, \eta_t)} \right) = \lim_{t \to 0} -\frac{D_i f(\xi_t, \eta_t)}{D_n f(\xi_t, \eta_t)} = -\frac{D_i f(\hat{x}, \varphi(\hat{x}))}{D_n f(\hat{x}, \varphi(\hat{x}))}.$$

Infatti per $t \to 0$ si ha $\xi_t \to \hat{x}$ e $\eta_t \to \varphi(\hat{x})$.

v) Poichè f è di classe C^1 e φ continua allora $D_i \varphi$ è continua. Per il teorema del differenziale totale è C^1.

C.V.D.

Osservazione 1: Se f è C^k si ottiene che φ è anch'essa C^k. Infatti si procede per induzione sul grado di differenziabilità k a partire dalla formula (3) che lega $D_i \varphi$ con φ. Infatti $D_i \varphi$ è C^k e quindi f è C^{k+1}. In particolare se f è C^∞ anche φ è C^∞.