Calcolo Differenziale e Integrazione, Anno Accademico 2001-2002, Matematica

Guasoni, Modica, Tortorelli

III foglio di esercizi
dal 22 ottobre al 26 ottobre 2001

I foglio di compendio alla teoria, Proposizione 1:

ERRATA: $\exists \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = l \iff \exists \lim_{n\to\infty} l_n = l.$

CORRIGE: 1) $\exists \lim_{n\to\infty} l_n \in \mathbf{R}$, 2) $\exists \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} l_n =: l$

DIM.: 1) $|l_n - l_m| \le |l_n - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| + |\varphi_m(x) - l_m| \le$
$\le |l_n - \varphi_n(x)| + \sup |\varphi_n - \varphi_m| + |\varphi_m(x) - l_m|.$

i) Si passa al limite per $x \to x_0$: $|l_n - l_m| \le \sup|\varphi_n - \varphi_m| \le \sup|\varphi_n - \varphi| + \sup|\varphi_m - \varphi|$;

ii) per la convergenza uniforme delle φ_n ne segue che la successione l_n è di Cauchy e quindi, per completezza, convergente ad un numero reale.

2) (si prosegue come nell'originale)

ESERCIZIO n. 1 Si dica in quali sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ le seguenti successioni di funzioni, per $n \to +\infty$, convergono puntualmente, in quali uniformemente, giustificando la risposta:

$$x^n\ ;\quad nx^n\ ;\quad \frac{1}{1+x^{2n}};\quad \frac{n^2}{1+x^{2n}};\quad \frac{1}{1+(x-n)^2}\ ;\quad \min\{n; \frac{1}{x^2}\}\ ;\quad \frac{(1+x^2)^{n+1}-1}{(1+x^2)^n}\ ;\quad \frac{1}{x^n+nx}\ ;$$
$$\sin\frac{x}{n};\quad \sin\frac{x^n}{1+x^{2n}}\ ;\quad n^2xe^{-nx}\ ;\quad n^{\sqrt{x}}e^{-\frac{n}{x}}\ ;\quad e^{-n(e^{-nx})}\ ;\quad x^{\sqrt{n}}e^{-\frac{x}{n}}\ ;\quad |n+x|^{n+x}\ ;\quad e^{-nx}\log nx\ ;$$
$$(\sin x)^n\ ;\quad \left(\frac{1}{n} + \sin^2 x\right)^n\ ;\quad \int_1^n \frac{e^{-xy}}{1+y^2}dy\,.$$

ESERCIZIO n. 2 Per $n \in \mathbf{N}$ si definisca: $g_n(x) = \begin{cases} \frac{x^3(\cos x)^n}{1-\cos x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

ESERCIZIO n. 3 Si studi la convergenza puntuale ed uniforme sui sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ della successione di funzioni: $\dfrac{n^2\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1+n^2\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}$.

ESERCIZIO n. 4 Si provi che la successione di funzioni: $f_n(x) = (\sin(nx))^{2n}$, $x \in [0; 2\pi]$, non converge in tutti i punti del dominio. Si studi la convergenza verso zero delle successioni numeriche date dai seguenti integrali:

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)dx\ ,\quad \int_0^{2\pi} nf_n(x)dx.$$

ESERCIZIO n. 5 Si dica in quali sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ le seguenti serie di funzioni, convergono puntualmente, in quali uniformemente, in quali totalmente, giustificando la risposta:

$$\sum_n \frac{1}{1+x^n}\ ;\quad \sum_n \frac{1}{x^n+nx},\ x>0\ ;\quad \sum_n \frac{x^3}{1+x^{2n}}\ ;\quad \sum_n \frac{x^n}{1-x^n};\ \sum_n \sin\frac{x}{2^n}\ ;\quad \sum_n \frac{\sin nx}{n^2}$$

$$\sum_n n(\sin x)^n;\ \sum_n \int_1^{\infty} e^{-xny^2}dy;\ \sum_n (\mathrm{artan}(nx+n)-\mathrm{artan} nx)\,;\quad (*)\ \sum_n \frac{1}{n+(x-n)^2},\ x\in\mathbf{R}.$$

ESERCIZIO n.6 Si studi la convergenza puntuale ed uniforme sui sottoinsiemi dei domini specificati delle successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, e detto f il limite si studi la convergenza puntuale ed uniforme e totale della serie $\sum_n(f_n-f)$:

$$\begin{cases} f_0(x)=1\ ,\quad x\in[0;1] \\ f_{n+1}(x) = \sqrt{xf_n(x)} \end{cases}\qquad \begin{cases} f_0(x)=\cos x\ ,\quad x\in\mathbf{R} \\ f_{n+1}(x) = \cos(f_n(x)) \end{cases}\qquad \begin{cases} f_0(x)\ ,\quad x\in[0;A] \\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(y)dy \end{cases}$$

ESERCIZIO n. 7 Dopo aver giustificato che le integrande sono integrabili si calcolino gli integrali giustificando la risposta: $\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 3}\left(\sum_n ne^{-nx}\right)dx\ ,\quad \int_0^{\infty}\left(\sum_n \frac{1}{4^n+x^2}\right)dx.$

ESERCIZIO n. 8 Si calcolino le somme delle seguenti serie di potenze

$$\sum_n \frac{x^{4n-1}}{4n-1}\ ,\quad \sum_n \frac{x^{4n}}{4n-3}\ ,\quad \sum_n \frac{(-x)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

ESERCIZIO n.9 Si studi il dominio di convergenza delle serie di potenze

$$\sum_n x^{4n-2}\ ,\quad \sum_n \frac{x^n}{n(n+1)}\ ,\quad \sum_n x^n 10^n\ ,\quad \sum_n \frac{(-x)^n}{n}\ ,\quad \sum_n \frac{x^n}{n10^{n-1}}\ ,\quad \sum_n \frac{x^n \sin n!}{n(n+4)}\ ,$$
$$\sum_n x^n n!\ ,\quad \sum_n x^{2(n-1)}2^{n-1}\ ,\quad \sum_n \frac{x^n}{n(n+1)}\ ,\quad \sum_n \frac{(-x)^n}{n-\log n}\ ,\quad \sum_n \frac{(n!)^2x^n}{(2n)!}\ ,\quad \sum_n x^{n!}$$
$$\sum_n 2^n x^{n^2}.$$

ESERCIZIO n. 10 Si studi la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni della variabile x

$$\sum_n \frac{\log(1+nx)}{nx^n}\ ,\quad \sum_n \frac{a^n}{n^x}\ (a>1)\ ,\quad \sum_n \frac{a^n}{n^x}\ (a<1)\ ,\quad \sum_n x^{n^2}a^n\ ,\quad \sum_n \frac{\log n}{n^x}$$

ESERCIZIO n. 11 Si studi il seguente problema di Cauchy per serie di potenze e si discuta la convergenza della serie determinata: $\begin{cases} (1+x^2)y''(x)+y(x)=0\ ,\quad x\in\mathbf{R} \\ y(0)= y'(0)=1 \end{cases}$

ESERCIZIO n.12 Si studino le seguenti serie di potenze in campo complesso all'interno del dominio di convergenza e si calcoli il limite delle prime due:

$$\sum_n z^n\ ,\quad \sum_n \frac{z^n}{n(n+1)}\ ,\quad \sum_n \frac{z^n}{n!}\ ,\quad (*)\ \sum_n \binom{\alpha}{n} z^n\ (\alpha\in\mathbf{C}).$$