Calcolo Differenziale e Integrazione, Anno Accademico 2001-2002, Matematica

Guasoni, Modica, Tortorelli

II foglio di compendio alla teoria

dal 12 novembre al 16 novembre

Definizione: - Sia $\mathcal{G}$ un gruppo di funzioni bigettive da un insime M in se, rispetto alla composizione di funzioni. Due elementi di M si dicono *$\mathcal{G}$-equivalenti* se uno é l'immagine dell'altro mediante un elemento di $\mathcal{G}$.

- Si dice che una funzione f con dominio in M é un invariante per il gruppo su una certa famiglia, se dati due elementi A e B della data famiglia per cui A é $\mathcal{G}$-equivalente a B allora $f(A) = f(B)$.

- Una classe di invarianti per il gruppo su di una famiglia si dice classificante se la coincidenza di essi determina l'equivalenza.

Definizione: - Il luogo di zeri di una funzione polinomiale di secondo grado in n variabili:

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a^i_j x^j x_i \ + \ 2\sum_{1\leq i\leq n} b_i x^i \ + \ c\ , \qquad \sum_{1\leq i,j\leq n} |a^i_j|^2 \neq 0$$

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} \ + \ 2\mathbf{b}^t\mathbf{x} + c\ , \quad A \neq \mathbf{0}_{n\times n}$$

$$\widetilde{\mathbf{x}}^t \widetilde{A}\widetilde{\mathbf{x}}\ , \quad \widetilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}\ , \quad \widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & \mathbf{b}^t \\ \hline \mathbf{b} & A \end{array}\right)\ , \quad A \neq \mathbf{0}_{n\times n}$$

si dice *quadrica.* Se $n = 2$ *conica.*

- Una quadrica si dice *non degenere* se $\det\widetilde{A} \neq 0$.

Osservazione: le coniche (orbite piane) si ottengono intersecando un doppio cono simmetrico con un piano.

Osservazione: Poiché: $\sum a_{ij}x_ix_j = \sum \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2} x_ix_j$, si assume che A, e quindi $\widetilde{A}$, sia una matrice simmetrica; *i.e.* $a_{ij} = a_{ji}$.

Osservazione: si é identificato $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con il sottospazio affine degli $\begin{pmatrix} x^0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ con la prima coordinata eguale ad 1: $x^0 = 1$. Conviene quindi osservare che il gruppo affine su $\mathbb{R}^n$ puó essere identificato con un sottogruppo, del gruppo lineare su $\mathbb{R}^{n+1}$, che agisce su tale sottospazio affine di $\mathbb{R}^{n+1}$ nel seguente modo:

alla trasformazione affine $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{w} + N\mathbf{x}$ su $\mathbb{R}^n$ si associa l'azione della matrice:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \hline \mathbf{w} & N \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{w} + N\mathbf{x} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \hline \mathbf{z} & P \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \hline \mathbf{w} & N \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \hline \mathbf{z} + P\mathbf{w} & PN \end{array}\right)\ , \quad \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \hline \mathbf{w} & N \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \hline -N^{-1}\mathbf{w} & N^{-1} \end{array}\right) = Id_{n+1}$$

Per scrivere la quadrica rispetto alle variabili $\mathbf{y} = -\mathbf{v} + M^{-1}\mathbf{x}$, considerando che $\widetilde{\mathbf{x}} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \hline M\mathbf{v} & M \end{array}\right)\widetilde{\mathbf{y}}$, si ottiene la polinomiale:

$$\widetilde{\mathbf{y}}^t \left[\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{v}^t M^t \\ \hline \mathbf{0} & M^t \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} c & \mathbf{b}^t \\ \hline \mathbf{b} & A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \hline M\mathbf{v} & M \end{array}\right)\right]\widetilde{\mathbf{y}}$$

Calcolo Differenziale e Integrazione, Anno Accademico 2001-2002, Matematica

II foglio di compendio alla teoria 12−16 novembre

CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE CONICHE

Ogni conica puó essere trasformata in una delle seguenti con un cambiamento di coordinate affine del tipo $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{w} + N\mathbf{x}$.

			$\det A > 0$:	A CENTRO
$x^2 + y^2 - 1 = 0$	Ellisse reale	$\bigcirc$	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$, $\det \widetilde{A} < 0$;	
$x^2 + y^2 + 1 = 0$	Ellisse immaginaria (vuoto)	$\emptyset$	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$, $\det \widetilde{A} > 0$;	
$x^2 + y^2 = 0$	Ellisse degenere (un punto)	$\cdot$	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 2$.	
			$\det A < 0$:	
$x^2 - y^2 - 1 = 0$	Iperbole	) (	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$;	
$x^2 - y^2 = 0$	Iperbole degenere (rette incidenti)	$\times$	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 2$,	
			$\det A = 0$:	
$y^2 - x = 0$	Parabola	$\cup$	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$, $\mathrm{rk}A = 1$	
$y^2 - 1 = 0$	Parabola degenere (rette parallele)	$=$	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 2$, $\mathrm{rk}A = 1$	
$y^2 + 1 = 0$	Parabola degenere (vuoto: rette immaginarie separate)	$\emptyset$	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 2$, $\mathrm{rk}A = 1$	
$y^2 = 0$	C. doppiamente degenere (retta “doppia”)	—	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 1$	

Una famiglia di invarianti classificante é quindi data da $\mathrm{sign}(\det A)$, $\mathrm{rk}\widetilde{A}$, $\mathrm{rk}A$, $\mathrm{sign}(\det\widetilde{A})$.

Calcolo Differenziale e Integrazione, Anno Accademico 2001-2002, Matematica

II foglio di compendio alla teoria 12−16 novembre

CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE QUADRICHE NON DEGENERI

Ogni quadrica non degenere puó essere trasformata in una delle seguenti con un cambiamento di coordinate affine.

		$\mathrm{rk}\widetilde{A} = n+1$
$\sum_{i=1}^{p}(x^i)^2 - \sum_{i=p+1}^{n}(x^i)^2 - 1 = 0$	Tipo ellisse-iperbole	$\det A \neq 0$
$\sum_{i=1}^{p}(x^i)^2 \ - \sum_{i=p+1}^{n-1}(x^i)^2 \ - x^n = 0$	Tipo parabola	$\mathrm{rk}A = n-1$

QUADRICHE NELLO SPAZIO

 $x^2+y^2+z^2-1=0$ $x^2+y^2+z^2+1=0$ $x^2+y^2+z^2=0$	 Ellissoide Ellissoide immaginario (vuoto) Ellissoide degenere (un punto)	$\det A > 0$ $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 4$, $\det\widetilde{A} < 0$ $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 4$, $\det\widetilde{A} > 0$ $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$, $\det\widetilde{A} = 0$
 $x^2+y^2-z^2-1=0$ $x^2+y^2-z^2+1=0$ $x^2+y^2-z^2=0$	 Iperboloide iperbolico ad una falda Iperboloide ellittico a due falde Iperboloide degenere (doppio cono)	$\det A < 0$ $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 4$, $\det\widetilde{A} > 0$ $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 4$, $\det\widetilde{A} < 0$ $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$, $\det\widetilde{A} = 0$
 $x^2+y^2-z=0$ $x^2-y^2-z=0$	 Paraboloide ellittico Paraboloide iperbolico (sella)	$\det A = 0$, $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 4$ $\mathrm{rk}A = 2$ $\det\widetilde{A} < 0$ $\mathrm{rk}A = 2$ $\det\widetilde{A} > 0$
 $x^2-y=0$ $x^2 \pm y^2 \pm 1 = 0$	 Paraboloide degenere (cilindro parabolico) Cilindri su coniche non degeneri con centro, eventualmente il vuoto	$\det A = 0$, $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$ $\mathrm{rk}A = 1$ $\mathrm{rk}A = 2$
 $x^2 \pm 1 = 0$ $x^2 \pm y^2 = 0$	 Vuoto o piani paralleli Retta o piani incidenti	$\det A = 0$, $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 2$ $\mathrm{rk}A = 1$ $\mathrm{rk}A = 2$
 $x^2 = 0$	 Piano“doppio”	$\det A = 0$, $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 1$ $\mathrm{rk}A = 1$