Corso di Laurea in Matematica, Calcolo Differenziale ed Integrazione: compito del 5-07-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

ESERCIZIO n. 1 Sia $f(\alpha) = \begin{cases} \alpha(1-e^{-\frac{1}{|\alpha|}}) \ , & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 0 \ , & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$. Si provi che:

a- la serie di funzioni $\sum_{n\geq 1} \frac{f(e^{nx}t^n)}{n!}$ converge uniformemente per $(t,x) \in \mathbf{R}^2$;

b- il limite, $(t,x) \mapsto S(t,x)$, di tale serie è differenziabile con continuità. Si calcoli $\frac{\partial S}{\partial t}(0,x)$.

---

a - $|f(\alpha)| = |\alpha||e^{-1/|\alpha|} - 1| = \frac{1-e^{-1/|\alpha|}}{1/|\alpha|} \leq 1$, $\alpha \neq 0$ $[1+\beta \leq e^{\beta} \ \forall \beta \in \mathbb{R}]$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} < +\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \sup_{z\in\mathbb{R}} \frac{|f(z^n)|}{n!} < +\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^2} \frac{|f(e^{nx}t^n)|}{n!} < +\infty$ $[z = e^x t]$

Quindi convergendo totalmente su $\mathbb{R}^2$ la serie converge uniformemente su $\mathbb{R}^2$.

b - Posto $S(t,x) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(e^{nx}t^n)}{n!}$ e $\Sigma(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(z^n)}{n!}$ si ha $\boxed{S(t,x) = \Sigma(e^x t)}$

$f'(\alpha) = \begin{cases} 1-(1+1/|\alpha|)e^{-1/|\alpha|} \ , & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 1 \ , & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$, si ha :

$\left|\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z^n)}{n!}\right)\right| = \left|\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}(1-(1+1/|z|^n)e^{-1/|z|^n})\right| = \frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!}\left|1-e^{-1/|z|^n} - \frac{1}{|z|^n}e^{-1/|z|^n}\right|$

$\leq \frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!}(2+1/e)$ $[e^{-\beta^2} \leq 1, \beta^2 e^{-\beta^2} \leq 1/e] \leq 3\frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!}$, $z \neq 0$

$\left|\frac{d}{dz}\frac{f(z^n)}{n!}\right|_{z=0} = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n>1 \end{cases} \leq \frac{3}{(n-1)!}$. Si noti che $\frac{df(z^n)}{dz}$ è continua

$\sup_{|z|\leq R} \left|\frac{d}{dz}\frac{f(z^n)}{n!}\right| \leq 3\frac{R^{n-1}}{(n-1)!}$. Quindi $\sum_{n\geq 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{f(z^n)}{n!}\right)$ converge totalmente sui compatti, per cui $\exists \ \frac{d\Sigma}{dz}(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{f(z^n)}{n!}\right)$ e per convergenza uniforme sui compatti è continua.

Essendo $S(t,x) = \Sigma(e^x \cdot t)$ composizione di funzioni C^1 è C^1.

$\frac{\partial S}{\partial t}(0,x) = \frac{d\Sigma}{dz}(0) \cdot e^x = \left(1 + \sum_{n\geq 2} 0\right) e^x = e^x$.

Corso di Laurea in Matematica, Calcolo Differenziale ed Integrazione: compito del 5-07-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

ESERCIZIO n. 2 Si considerino i domini

$$A_n = \{(x, y, z) : \ |z| \leq (1 + |x|^2 + |y|^2)^{-\frac{1}{n}}\} \cap \{x^2 + y^2 \geq 1\}$$

e le funzioni

$$f_n(x, y, z) = \frac{\sqrt[n]{|x| + |y| + |z|}}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}$$

a-Provare che $(x, y, z) \in A_n$ si ha:

$$\frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2n}}}{(2 + x^2 + y^2)^\alpha} \leq f_n \leq \frac{(9(x^2 + y^2))^{\frac{1}{2n}}}{(1 + x^2 + y^2)^\alpha}$$

b- Si dica per quali $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f_n$$

è finito.

---

a. $f_n(x,y,z) \geqslant \frac{\sqrt[n]{|x|+|y|}}{(2+x^2+y^2)^\alpha}$ $[0 \leq |z| \leq 1, \ \alpha > 0] \geqslant \frac{(x^2+y^2)^{1/2n}}{(2+x^2+y^2)^\alpha}$ $[|a|+|b| \geqslant \sqrt{a^2+b^2}]$

$f_n(x,y,z) \leqslant \frac{\sqrt[n]{|x|+|y|+1}}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$ $[\alpha > 0, \ |z| \leqslant 1] = \frac{(x^2+y^2)^{1/2n} \sqrt[n]{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$ $[0 \neq x^2+y^2 \geqslant 1]$

$\leq \frac{(x^2+y^2)^{1/2n}}{(1+x^2+y^2)^\alpha} \cdot 3^{1/n}$ $[x^2+y^2 \geqslant 1]$. $\quad 3^{1/n} = 9^{1/2n}$

b. 1) Si osservi che $\frac{3^{1/n}(x^2+y^2)^{1/2n}}{(1+x^2+y^2)^\alpha} \leq 3^{1/n} \, 2^\alpha \frac{(x^2+y^2)^{1/2n}}{(2+x^2+y^2)^\alpha}$. 2) Inoltre:

2) $\int_{A_n} \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2n}}}{(1+x^2+y^2)^\alpha} \, dx\,dy\,dz = 2 \int_{\{x^2+y^2 \geqslant 1\}} \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2n}}}{(1+x^2+y^2)^\alpha} \cdot \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{x^2+y^2+1}}} dz \right) dx\,dy$

[Fubini Tonelli, $f_n(x,y,z) = f_n(x,y,-z)$] $= 4\pi \int_1^{+\infty} \frac{\rho^{\frac{1}{n}}}{(1+\rho^2)^\alpha} \cdot \frac{1}{(1+\rho^2)^{\frac{1}{n}}} \cdot \rho \, d\rho$ [Polari]

$= 2\pi \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{\theta}}{1+\theta}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{(1+\theta)^\alpha} \, d\theta$ $[\rho^2 = \theta]$.

3) Essendo $\theta \geqslant 1$: $\frac{1}{\sqrt{\theta}} \geqslant \frac{\sqrt{\theta}}{1+\theta} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{\theta}}$, $\frac{1}{\theta} \geqslant \frac{1}{1+\theta} \geqslant \frac{1}{2\theta}$; essendo $\alpha > 0$, $\frac{1}{n} > 0$

per positività dell'integrale si ha considerando 1) e 2):

Corso di Laurea in Matematica, Calcolo Differenziale ed Integrazione: compito del 5-07-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

ESERCIZIO n. 2 Si considerino i domini

$$A_n = \{(x,y,z): \ |z| \leq (1+|x|^2+|y|^2)^{-\frac{1}{n}}\} \cap \{x^2+y^2 \geq 1\}$$

e le funzioni

$$f_n(x,y,z) = \frac{\sqrt[n]{|x|+|y|+|z|}}{(1+x^2+y^2+z^2)^\alpha} \quad , \quad \alpha > 0$$

a-Provare che $(x,y,z) \in A_n$ si ha:

$$\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2n}}}{(2+x^2+y^2)^\alpha} \leq f_n \leq \frac{(9(x^2+y^2))^{\frac{1}{2n}}}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$$

b- Si dica per quali $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f_n$$

è finito. (ipotizzandone l'esistenza)

$$0 \leq \frac{1}{2^{\alpha+1/n}} \cdot \frac{\pi}{2^{\alpha-1}} \int_1^{+\infty} \frac{d\varrho}{\varrho^{1/2n+\alpha}} \leq \int_{A_n} f_n(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \leq 2\pi \cdot 3^{1/n} \int_1^{+\infty} \frac{d\varrho}{\varrho^{1/2n+\alpha}}$$

4) Quindi $\limsup_{n\to\infty} \int_{A_n} f_n < +\infty \iff \limsup_{n\to\infty} \int_1^{+\infty} \frac{d\varrho}{\varrho^{1/2n+\alpha}} < +\infty$

$\liminf_{n\to\infty} \int_{A_n} f_n = +\infty \iff \liminf_{n\to\infty} \int_1^{+\infty} \frac{d\varrho}{\varrho^{1/2n+\alpha}} = +\infty$

- Per $\alpha > 1$ $\frac{1}{2n}+\alpha > 1$: $\int_1^{+\infty} \frac{d\varrho}{\varrho^{1/2n+1}} = \lim_{c\to+\infty} \left(\frac{c^{1-\frac{1}{2n}-\alpha}}{1-\frac{1}{2n}-\alpha} - \frac{1}{1-\frac{1}{2n}-\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha+\frac{1}{2n}-1}$

per $0<\alpha<1$, se $n > \frac{1}{2(1-\alpha)}$ si ha $\frac{1}{2n}+\alpha \leq 1$: $\int_1^{+\infty} \frac{d\varrho}{\varrho^{1/2n+1}} = +\infty$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_1^{+\infty} \frac{d\varrho}{\varrho^{1/2n+\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & 0<\alpha\leq 1 \end{cases}$$

. Concludendo

Se $\exists \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f_n = \lambda$ si ha $0<\lambda<+\infty$ se $\alpha>1$; $\lambda = +\infty$ se $\alpha \leq 1$

Corso di Laurea in Matematica, Calcolo Differenziale ed Integrazione: compito del 5-07-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

ESERCIZIO n. 3 Sia $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 - z^2}{2} - xy + zy$.

a- Si risolva il sistema $\gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t))$.

b- Si determino i dati iniziali per cui l'immagine, al variare di $t \in \mathbf{R}$, della soluzione del relativo problema di Cauchy è un insieme limitato.

c- Sia $S(t)$ l'insieme dei punti raggiunti all'istante t dalle soluzioni con dato iniziale in $t = 0$ sulla sfera $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Si calcoli il massimo di f su $S(t)$.

---

a) $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - y \\ z - x \\ y - z \end{pmatrix}$; $\gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t))$ è il sistema :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = -x(t) + z(t) \\ z'(t) = y(t) - z(t) \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} =: M \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -(1+\lambda) \end{pmatrix} = \lambda(3 - \lambda^2) \qquad \lambda = 0, \quad \lambda = \sqrt{3}, \quad \lambda = -\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} M V_1 = \sqrt{3} V_1 \\ |V_1| = 1 \end{cases} \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{3} \\ \sqrt{3} - 2 \end{pmatrix} \frac{\pm 1}{\sqrt{6}\sqrt{2 - \sqrt{3}}}, \quad \begin{cases} M V_2 = -\sqrt{3} V_2 \\ |V_2| = 1 \end{cases} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} - 2 \end{pmatrix} \frac{\pm 1}{\sqrt{6}\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$\begin{cases} M V_3 = 0 \\ |V_3| = 1 \end{cases} \quad V_3 = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

. Quindi le soluzioni sono

$$\begin{cases} \gamma(t) = e^{t\sqrt{3}} \dfrac{A}{\sqrt{6}\sqrt{2-\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{3} \\ \sqrt{3} - 2 \end{pmatrix} + e^{-t\sqrt{3}} \dfrac{B}{\sqrt{6}\sqrt{2+\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} - 2 \end{pmatrix} + \dfrac{C}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A, B, C \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{t\sqrt{3}} + \beta e^{-t\sqrt{3}} + \delta \\ \alpha(1-\sqrt{3}) e^{t\sqrt{3}} + \beta(1+\sqrt{3}) e^{-t\sqrt{3}} + \delta \\ \alpha(\sqrt{3}-2) e^{t\sqrt{3}} - \beta(\sqrt{3}+2) e^{-t\sqrt{3}} + \delta \end{pmatrix} \\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Corso di Laurea in Matematica, Calcolo Differenziale ed Integrazione: compito del 5-07-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

ESERCIZIO n. 3 Sia $f(x,y,z) = \frac{x^2 - z^2}{2} - xy + zy$.

a- Si risolva il sistema $\gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t))$.

b- Si determino i dati iniziali per cui l'immagine, al variare di $t \in \mathbf{R}$, della soluzione del relativo problema di Cauchy è un insieme limitato.

c- Sia $S(t)$ l'insieme dei punti raggiunti all'istante t dalle soluzioni con dato iniziale in $t = 0$ sulla sfera $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Si calcoli il massimo di f su $S(t)$.

---

b – Poichè M è simmetrica $(V_i \cdot V_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ quindi

$$|\gamma(t)|^2 = e^{2t\sqrt{3}} A^2 + e^{-2t\sqrt{3}} B^2 + C^2$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\gamma(t)|^2 < +\infty \iff A = B = 0$$

QUINDI LE SOLUZIONI LIMITATE SONO SOLO QUELLE COSTANTI CHE SONO

$\gamma(t) = \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. QUINDI I DATI INIZIALI PER CUI SI HANNO SOLUZIONI LIMITATE SONO QUELLI PER CUI $x_0 = y_0 = z_0$.

c – Va calcolato $\max_{|\gamma_0| = 1} f(\gamma_{\gamma_0}(t))$ ove $\begin{cases} \gamma_{\gamma_0}'(t) = M\gamma_{\gamma_0}(t) \\ \gamma_{\gamma_0}(0) = \gamma_0 \end{cases}$

fissato $t \in \mathbb{R}$

Conviene usare il sistema di coordinate ortonormali dato da (V_1, V_2, V_3)

f è una forma quadratica $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(M(xyz)\cdot(xyz))$

nelle coordinate (V_1, V_2, V_3): $f(\tilde{x}V_1 + \tilde{y}V_2 + \tilde{z}V_3) = \frac{\sqrt{3}\,\tilde{x}^2 - \sqrt{3}\,\tilde{y}^2}{2}$

Quindi $f(\gamma_{\gamma_0}(t)) = \frac{\sqrt{3}}{2} A_{\gamma_0}^2 e^{2\sqrt{3}t} - \frac{\sqrt{3}}{2} B_{\gamma_0}^2 e^{-2\sqrt{3}t}$

Inoltre $|\gamma_0|^2 = 1$ vuol dire $|\gamma_{\gamma_0}(0)|^2 = 1 = A_{\gamma_0}^2 + B_{\gamma_0}^2 + C_{\gamma_0}^2$

Concludendo

$$\max_{|\gamma_0|=1} f(\gamma_{\gamma_0}(t)) = \max_{A^2+B^2+C^2=1} \frac{\sqrt{3}}{2}\left(A^2 e^{2\sqrt{3}t} - B^2 e^{-2\sqrt{3}t}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{2\sqrt{3}t}.$$