Calcolo Differenziale e Integrazione, Anno Accademico 2001-2002, Matematica

Guasoni, Modica, Tortorelli

I foglio di compendio alla teoria
dal 22 ottobre 2001 al 26 ottobre

Proposizione 1:
Se $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ uniformemente in un intorno di x_0, e per ogni $n \in \mathbf{N}$ $\varphi_n(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l_n$ allora:
$$\exists \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = l \iff \exists \lim_{n\to\infty} l_n = l.$$
In particolare se φ_n converge uniformemente ad φ in un intorno di x_0 ed esistono tutti i limiti:
$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} \varphi_n(x).$$
DIM.: $\Rightarrow$)

$$|l_n - l| \le |l_n - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - l| \le |l_n - \varphi_n(x)| + \sup|\varphi_n - \varphi| + |\varphi(x) - l|,$$

i) Si passa al limite per $x \to x_0$: $|l_n - l| \le \sup|\varphi_n - \varphi|$;

ii) si passa al limite per $n \to \infty$: $0 \le \limsup_{n\to\infty} |l_n - l| \le \lim_{n\to\infty} (\sup|\varphi_n - \varphi|) = 0$.

$\Leftarrow$)

$$|\varphi(x) - l| \le |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - l_n| + |l_n - l| \le \sup|\varphi_n - \varphi| + |\varphi_n(x) - l_n| + |l_n - l|,$$

i) Si passa al limite per $x \to x_0$: $0 \le \limsup_{x\to x_0} |\varphi(x) - l| \le \sup|\varphi_n - \varphi| + |l_n - l|$;

ii) si passa al limite per $n \to \infty$: $0 \le \limsup_{x\to x_0} |l_n - l| \le \lim_{n\to\infty} (\sup|\varphi_n - \varphi| + |l_n - l|) = 0.\bullet$

Definizione 1: Le funzioni φ_n, soddisfano la *condizione di Cauchy uniforme su D* se
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu \in \mathbf{N}\ \forall\ m,\ n \ge \nu\ \sup_D |\varphi_n - \varphi_m| \le \varepsilon.$$

Proposizione 2: Una successione di funzioni φ_n converge uniformemente in D se e solo se soddisfa la condizione di Cauchy uniforme su D.

DIM.: $\Rightarrow$) Si prova prima l'esistenza del limite puntuale e quindi si prova che è uniforme.

i) Essendo φ_n di Cauchy uniformemente su D, in particolare per ogni $x \in D$ le successioni di valori $\varphi_n(x)$ sono di Cauchy: $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \le \sup|\varphi_n - \varphi_m|$. Per completezza del codominio
$$\forall x \in D\ \exists \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) =: \varphi(x) \in \mathbf{R}.$$

ii) Fissato $\varepsilon > 0$ si consideri ν per cui: $\forall\ m,\ n \ge \nu :\ \sup_D |\varphi_m - \varphi_n| \le \varepsilon$. Si ha:

$$\begin{aligned}\sup_D |\varphi_n - \varphi| = \sup_{x\in D} \lim_{m\to\infty} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| &= \sup_{x\in D} \liminf_{m\to\infty} |\varphi_n(x) - f_m(x)| = \\ &= \sup_{x\in D} \sup_{M\in\mathbf{N}} \inf_{m\ge M} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \le \\ &\le \liminf_{m\to\infty} \sup_{x\in D} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \le \varepsilon\ ,\quad \forall n \ge \nu.\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Come per i numeri reali.$\bullet$

Proposizione 3: Se $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{punt.}} f$ e $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif.}} g$ su $]a;b[$ allora anche f è derivabile in $]a;b[$ e $f' = g$. In altri termini:

$$\exists \left(\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)_{x=x_0} = \lim_{n\to\infty}\frac{df_n}{dx}(x_0)\ ,\quad \forall\ x_0 \in]a;b[$$

DIM.: Fissato $x_0 \in]a;b[$ si vuole provare che $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - g(x_0) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$

Sia $\delta > 0$ per cui $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$.

i) Per convergenza puntuale di f_n ad f e di f_n' a g, si ha per ogni $|h| \le \delta$:

$$R_n(h) - f_n'(x_0) = \frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h} - f_n'(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - g(x_0).$$

ii) D'altronde per definizione di derivata si ha: $\quad R_n(h) - f_n'(x_0) \to 0, \quad h \to 0.$

iii) Se la convergenza, per $n \to \infty$, di $R_n(h)$ a $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ fosse uniforme rispetto a $|h| \le \delta$, la proposizione 1 garantirebbe la tesi desiderata. Infatti con $\varphi_n(h) = R_n(h) - f_n'(x_0)$, $l_n = 0 = l$:

$$\exists \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - g(x_0) = \lim_{h\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h} - f_n'(x_0) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f_n'(x_0) = \lim_{n\to\infty} 0 \ =\ 0.$$

Nei prossimi due punti si prova la convergenza uniforme in $|h| \le \delta$, per $n \to \infty$, delle $R_n(h)$.

iv) Si ha la seguente valutazione dell'errore dei rapporti incrementali:

$$\sup_{|h|\le\delta}\left|\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h} - \frac{f_m(x_0+h)-f_m(x_0)}{h}\right| =$$

$$\sup_{|h|\le\delta}\left|\frac{f_n(x_0+h)-f_m(x_0+h)-(f_n(x_0)-f_m(x_0))}{h}\right| =$$

(per il teorema di Lagrange alla funzione $x \mapsto f_n(x) - f_m(x)$, vi è $\xi_{m,n,h}$ tra x_0 e $x_0 + h$)

$= \sup_{|h|\le\delta} |f_n'(\xi_{m,n,h}) - f_m'(\xi_{m,n,h})| \le$ (l'immagine di $h \mapsto \xi_{m,n,h}$ è contenuta in $]a;b[$)

$\le \sup_{x\in]a;b[} |f_n'(x) - f_m'(x)|\,.$

v) Poichè f_n' converge uniformemente, per la proposizione 2 è di Cauchy uniformemente e quindi per la diseguaglianza appena provata anche la successione di funzioni $R_n(h) = \left|\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h}\right|$ è di Cauchy uniformemente in $|h| \le \delta$.

vi) Ancora per la proposizione 2 si ha quindi che $R_n(h)$ converge uniformemente.●

ESERCIZIO: Sulla falsariga del precedente argomento si provi la seguente:

Proposizione 4: Se $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{punt.}} f$ e f_n' convergono uniformemente allora $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif.}} f$.