Calcolo Differenziale ed Integrazione, compito del 28-05-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

ESERCIZIO n. 1

i) Al variare del parametro ϵ, si risolva l'equazione differenziale:

$$\epsilon y'' + y' - y = \epsilon e^x, \quad \epsilon \geqslant 0$$

ii) Detta $y_\epsilon(t)$ una famiglia di soluzioni dell'equazione sopra, è vero che $y_\epsilon(t)$ converge a $y_0(t)$ per ϵ che tende a 0?

---

i). $\varepsilon = 0$: $y' - y = 0 \Rightarrow y(x) = c e^x$

• $\varepsilon \gneq 0$: SOLUZIONI OMOGENEA : $\varepsilon \tilde{y}'' + \tilde{y}' - \tilde{y} = 0$, $\varepsilon\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon}$

$$\tilde{y}(x) = a e^{\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}-1}{2\varepsilon}x} + b e^{-\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}{2\varepsilon}x} = a e^{\frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}x} + b e^{-\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}{2\varepsilon}x}$$

SOLUZIONE PARTICOLARE : $y^* = \alpha e^x \Rightarrow \varepsilon\alpha + \alpha - \alpha = \varepsilon \Rightarrow \alpha = 1$

$$y(x) = a e^{\frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}x} + b e^{-\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}{2\varepsilon}x} + e^x$$

ii) La generica famiglia di soluzioni parametrizzata da ε è :

$$y_\varepsilon(x) = a_\varepsilon e^{\frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}x} + b_\varepsilon e^{-\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}{2\varepsilon}x} + e^x$$

se si considera $a_\varepsilon \equiv 0$, e $b_\varepsilon \equiv 1$, essendo $\varepsilon > 0$

si ha che tale $y_\varepsilon(x) = e^{-\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}{2\varepsilon}x} + e^\varepsilon$

diverge per $x \lneq 0$, $\varepsilon \to 0^+$.

In particolare non converge ad alcuna delle soluzioni di $y' - y = 0$.

Calcolo Differenziale ed Integrazione, compito del 28-05-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

ESERCIZIO n. 2

Si trovino, al variare del parametro α, tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y'' = 3y' + x \\ x' = -(3-\alpha^2)y' - (\alpha^2 - 1)y \end{cases}$$

Derivando la prima equazione e sostituendo il valore di x' dato dalla seconda si ottiene

$$y''' = 3y'' - (3-\alpha^2)y' - (\alpha^2-1)y \ , \quad y''' - 3y'' + (3-\alpha^2)y' + (\alpha^2-1)y = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + (3-\alpha^2)\lambda + \alpha^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - \alpha^2\lambda + \alpha^2 - 1 = \lambda^3 + 3\lambda(1-\lambda) + \alpha^2(1-\lambda) - 1 =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) - (3\lambda+\alpha^2)(\lambda-1) =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \alpha^2)$$

$$\lambda_1 = 1 \ , \quad \lambda_2 = \frac{2 - \sqrt{4-4+4\alpha^2}}{2} \ , \quad \lambda_3 = \frac{2 + \sqrt{4-4+4\alpha^2}}{2}$$

$$\lambda_1 = 1 \ , \quad \lambda_2 = 1 - |\alpha| \ , \quad \lambda_3 = 1 + |\alpha|$$

Si ha

$$\alpha \neq 0 \qquad y = a e^{t} + b e^{(1-|\alpha|)t} + c e^{(1+|\alpha|)t} = (a + b e^{-|\alpha|t} + c e^{|\alpha|t}) e^t$$

$$\alpha = 0 \qquad y = a e^t + b t e^t + c t^2 e^t = (a + bt + ct^2) e^t$$

Poiché dalla prima equazione si ha $x = y'' - 3y'$ ne segue.

$$\alpha \neq 0 \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + b \begin{pmatrix} 1 \\ (1-|\alpha|)^2 - 3(1-|\alpha|) \end{pmatrix} e^{(1-|\alpha|)t} + c \begin{pmatrix} 1 \\ (1+|\alpha|)^2 - 3(1+|\alpha|) \end{pmatrix} e^{(1+|\alpha|)t}$$

$$\alpha = 0 \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + b \begin{pmatrix} t \\ -1-2t \end{pmatrix} e^t + c \begin{pmatrix} t^2 \\ 2-2t-2t^2 \end{pmatrix} e^t$$

Calcolo Differenziale ed Integrazione, compito del 28-05-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

ESERCIZIO n. 3

Si risolva esplicitamente (eventualmente cambiando coordinate) il sistema di equazioni differenziali in $(x(t), y(t))$:

$$\begin{cases} x' = x(1-x^2-y^2) - y(x^2+y^2) \\ y' = y(1-x^2-y^2) + x(x^2+y^2) \end{cases}$$

A)• Poiché $F(t,x,y) = \begin{pmatrix} x(1-x^2-y^2) - y(x^2+y^2) \\ y(1-x^2-y^2) + x(x^2+y^2) \end{pmatrix} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è C^1 è anche localmente lipschitziana uniformemente in t. Quindi per ogni dato iniziale (x_0, y_0) in $t=0$ vi è un intervallo I, $0 \in I$ ed un'unica soluzione del sistema su I con tale dato iniziale: $(x(t), y(t))$.

B)• Posto $q(t) = \rho^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$ si ha $q' = 2xx' + 2yy' = 2x^2(1-q) + 2y^2(1-q)$ $= 2q(1-q)$. Quindi q risolve $\begin{cases} q' = 2q(1-q) \\ q \geq 0 \\ q(0) = x_0^2 + y_0^2 \end{cases}$ su I

i. Se $x_0^2+y_0^2=0$ per unicità direttamente dal sistema si ha $\boxed{I = \mathbb{R}, (x(t), y(t)) \equiv 0}$

ii. Se $x_0^2+y_0^2=1$ per unicità del problema soddisfatto da q si ha $q(t) \equiv 1$ $t \in I$, quindi

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \end{cases} \iff \boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - y_0 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \quad I = \mathbb{R}.}$$

iii. Se poi $q(0) \neq 0, 1$ per unicità del problema soddisfatto da q si ha $q(t) \neq 0, 1$ $\forall t \in I$ quindi $\frac{q'}{q(1-q)} = 2$ e integrando $\frac{q(t)}{|1-q(t)|} = e^c e^{2t}$ $c = \log \frac{q(0)}{|1-q(0)|}$.

• Se $0 \lneq q(0) \lneq 1$ per unicità $0 \lneq q(t) \lneq 1$ $\forall t \in I$, quindi $\frac{q(t)}{1-q(t)} = e^c e^{2t}$ per cui

$$\underline{q(t) = \frac{e^c e^{2t}}{1 + e^c e^{2t}}} = \frac{(x_0^2+y_0^2) e^{2t}}{1 + (x_0^2+y_0^2)(e^{2t}-1)}, \quad t \in I.$$

• Se $q(0) \gneq 1$ per unicità $q(t) \gneq 1$ $\forall t \in I$, quindi $\frac{q(t)}{q(t)-1} = e^c e^{2t}$, essendo $\frac{q(t)}{q(t)-1} \gneq 1$ $\Rightarrow$ a) $t \gneq -\frac{c}{2}$, cioè $I \subseteq]-\frac{c}{2}; +\infty[$ b) $\underline{q(t) = \frac{e^c e^{2t}}{e^c e^{2t} - 1}} = \frac{(x_0^2+y_0^2) e^{2t}}{1 + (x_0^2+y_0^2)(e^{2t}-1)}$, $t \in I$

C)• Nel caso $x_0^2+y_0^2 \neq 0$ e quindi per unicità $x^2(t) + y^2(t) \neq 0$ $\forall t \in I$, essendo

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \arctan y/x & x>0, y \geq 0 \\ \pi/2 & x=0, y>0 \\ \pi + \arctan y/x & x<0 \\ \frac{3}{2}\pi & x=0, y<0 \\ 2\pi + \arctan y/x & x>0, y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y} \\ \pi \\ \frac{3}{2}\pi - \arctan \frac{x}{y} \end{cases} \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}),$$

è definita: $\theta(t) = \varphi(x(t), y(t)) \in C^1(I)$

e si ha $(x(t), y(t)) = (\rho(t) \cos\theta(t), \rho(t) \sin\theta(t))$; $t \in I$. Derivando

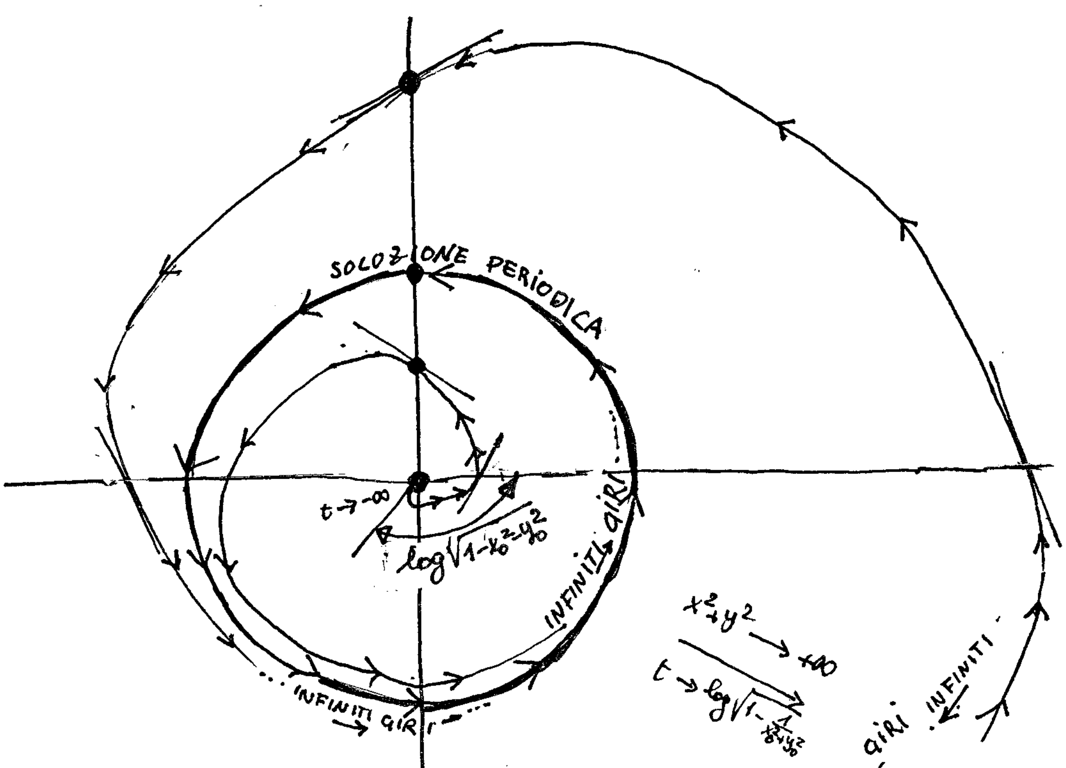
$$\vartheta'(t) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x - yx'}{x^2} = \frac{1}{x^2+y^2}\,(y'x - yx') = [\text{equazione}]\ q(t) \quad \text{se } x(t) \neq 0$$

$$\vartheta'(t) = -\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{x'y - xy'}{y^2} = q(t) \quad \text{se } y(t) \neq 0$$

per cui $\forall t \in I \quad \vartheta'(t) = q(t)$ e quindi : $\theta(t) = \log\sqrt{1+(x_0^2+y_0^2)(e^{2t}-1)} + \varphi(x_0,y_0)$

Concludendo :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & I = \mathbb{R} \quad \text{se } x_0 = y_0 = 0 \\ x_0\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - y_0\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t+\varphi(x_0y_0)) \\ \sin(t+\varphi(x_0y_0)) \end{pmatrix}, & I = \mathbb{R} \quad \text{se } x_0^2+y_0^2 = 1 \\ \sqrt{\frac{(x_0^2+y_0^2)\,e^{2t}}{1+(x_0^2+y_0^2)(e^{2t}-1)}} \begin{pmatrix} \cos\left(\log\sqrt{1+(x_0^2+y_0^2)(e^{2t}-1)} + \varphi(x_0y_0)\right) \\ \sin\left(\log\sqrt{1+(x_0^2+y_0^2)(e^{2t}-1)} + \varphi(x_0y_0)\right) \end{pmatrix}, & I = \begin{cases} \mathbb{R} & 0 \underset{\neq}{<} x_0^2+y_0^2 \underset{\neq}{<} 1 \\ \left]\log\sqrt{1-\frac{1}{x_0^2+y_0^2}}\,;+\infty\right[& x_0^2+y_0^2 \underset{\neq}{>} 1 \end{cases} \end{cases}$$



$$\lim_{t\to+\infty} \theta = +\infty$$

• dato iniziale per $\varphi(x_0y_0) = \frac{\pi}{2}$

per $x=0 \quad \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{y^2} = 1 - \frac{1}{\rho^2}$

per $y=0 \quad \frac{dx}{dy} = -1 + \frac{1}{x^2} = -1 + \frac{1}{\rho^2}$