Esercizi 05/10/2007

1 Calcolo combinatorio

- Il designatore arbitrale ha a disposizione 10 arbitri che deve assegnare alle 10 partite della sesta giornata di campionato di Serie A. Quante sono le possibili assegnazioni, in altri termini quante sono le possibili scelte che il designatore può operare?

  ▷ Quante sono le possibili assegnazioni, in altri termini quante sono le possibili scelte che il designatore può operare?

  ▷ Se il designatore deve anche assegnare ad ogni partita due guardialinee e un quarto uomo (e quindi ha a disposizione 20 guardialinee e 10 quarti uomini), quante sono le possibili assegnazioni delle quaterne arbitrali per le dieci partite?

- L'allenatore dell'Inter, Roberto Mancini, durante la partita Roma-Inter, decide, per cambiare le sorti del match, di operare contemporaneamente tre cambi e quindi sceglie tre giocatori tra i sette che compongono la sua panchina.

  ▷ In quanti modi Mancini può scegliere questi tre giocatori?

  ▷ Quante sono le nuove possibili formazioni che Mancini otterrà operando il cambio?

  ▷ Qual è la risposta alla precedente domanda se Mancini, come succede spesso, decide che cambierà fra loro due giocatori solo se essi hanno il medesimo ruolo? Al lettore di decidere quale è il numero di difensori, centrocampisti e attaccanti che vi sono in campo e in panchina.

2 Sviluppi in base

- Giacomino riceve per il suo compleanno 141 caramelle: sua nonna, che non ama affatto il disordine, dà a Giacomino delle scatole, ciascuna delle quali può contenere fino a 4 caramelle e chiede al nipote di sistemare le caramelle nelle scatole.

  Quante scatole usa Giacomino e quante caramelle restano fuori?

  La nonna spaventata da così tante scatole, decide di tirare fuori altre scatole più grosse. Ha a disposizione solo scatole la cui capienza è una potenza di 4 (quindi scatole da 4, da 16, da 64,...). Chiede a Giacomino di sistemare le caramelle usando anche queste scatole più grosse in modo che alla fine nessuna scatola sia riempita solo parzialmente e non vi siano mai quattro copie piene della stessa scatola. Quante e di che tipo sono le scatole che Giacomino utilizzerà per sistemare le caramelle, seguendo la regola della nonna?

Quale sarebbe la risposta alla domanda precedente se Giacomino, in un anno particolarmente fortunato, ricevesse 22874 carmelle e la nonna avesse solo scatole la cui capienza è una potenza di sette?

3 Polinomi ed equazioni polinomiali

- Sia n un numero naturale. Un polinomio di grado n a coefficienti reali è un'espressione che può essere scritta come

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \ldots + a_1 X + a_0$$

con $a_n \neq 0$. Il numero naturale n è detto grado del polinomio. Risolvere l'equazione associata al polinomio $P(X)$ nei reali significa trovare esplicitamente l'insieme dei numeri reali α tali che

$$P(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + a_{n-2} \alpha^{n-2} + \ldots + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

Ad esempio, se il polinomio $2X - 3$, c'è un solo numero naturale $\alpha \in \mathbb{R}$, tale che $2\alpha - 3 = 0$ ed è $\alpha = 2/3$; se il polinomio è $3 = \ldots + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X + 3$, non c'è alcun numero reale che soddisfi l'equazione $3 = 0$ e quindi l'insieme cercato è l'insieme vuoto. Per semplicità di notazioni, siccome siamo interessati alla soluzione di equazioni associate a polinomi, diremo semplicemente *risolvere l'equazione* $P(X) = 0$ (anziché risolvere l'equazione associata al polinomio $P(X)$).

- (*Equazioni di secondo grado.*) Consideriamo il polinomio a coefficienti reali $P(X) = aX^2 + bX + c$ di grado 2 (quindi $a \neq 0$) e cerchiamo di risolvere l'equazione associata. Osserviamo che la soluzione è facile se $b = 0$ e $-c/a = d^2$ perché in tal caso possiamo scrivere il polinomio come $P(X) = a(X^2 + c/a) = a(X - d)(X + d)$ e $P(\alpha) = 0$ se e solo se $\alpha = d$ oppure $\alpha = -d$. La nostra strategia sarà quindi quella di ricondurci in qualche modo a questo caso. Operiamo le semplici manipolazioni algebriche seguenti

$$P(X) = aX^2 + bX + c = a\left(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[X^2 + 2 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right) X + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Supponiamo ora che

$$\Delta = \left(b^2 - 4ac\right) \geq 0$$

Siccome un numero reale è il quadrato di un altro numero reale se e solo se è non negativo, sappiamo che Δ è il quadrato di un altro numero reale se e solo se $\Delta \geq 0$. Supponiamo allora che $\Delta \geq 0$. In tal caso esisterà un numero reale δ tale che $\delta^2 = \Delta$. Si può anche vedere che esiste un unico numero reale non negativo δ_+ tale che $\delta_+^2 = \Delta$: poniamo $\delta_+ = \sqrt{\Delta}$ (e diremo che $\sqrt{\Delta}$ è la radice quadrata di Δ). Continuiamo con la nostra equazione:

- se $\Delta \geq 0$ possiamo scrivere

$$P(X) = a\left[\left(X + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(X + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

Per cui, se $\Delta \geq 0$, si ha $P(\alpha) = 0$ per un numero reale α se e solo se

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{oppure} \quad \alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- nel caso in cui invece $\Delta < 0$, $P(\alpha) = 0$ significherebbe

$$a\left(\alpha + \frac{b}{2a}\right)^2 = a\frac{\Delta}{4a^2}$$

ossia

$$\left(\alpha + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Osserviamo però che questo è impossibile perché il termine a sinistra è un quadrato quindi è sempre non negativo, mentre il termine di destra, nel nostro caso, è negativo. Un numero reale non può essere contemporaneamente non negativo e negativo per cui se $\Delta < 0$ non esiste alcun numero reale α tale che $P(\alpha) = 0$.

- Risolvere le segeunti equazioni.

  $3X - 1 = 0$

  $tX + 5 = 0$ con $t \in \mathbb{R}$

  $X^2 + 3X + 2 = 0$

  $2X^2 - 8X + 6 = 0$

  $(3/4)X^2 - 2X + 17 = 0$

  $6X^2 - tX + 1 = 0$ con $t \in \mathbb{R}$

4 Sistemi lineari

- Un polinomio lineare nelle variabili $X_1, X_2, \ldots, X_n$ è una espressione che può essere scritta come

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n + c_0$$

con $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Risolvere l'equazione associata ad un polinomio lineare $P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ significa trovare esplicitamente l'insieme delle n-uple[1] di numeri reali $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ tali che

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_n\alpha_n + c_0 = 0$$

- Un sistema lineare è un insieme costituito da r polinomi lineari in n variabili $P_1(X_1, \ldots, X_n)$, $P_2(X_1, \ldots, X_n)$, $\ldots$, $P_r(X_1, \ldots, X_n)$. Trovare le soluzioni di un sistema lineare significa trovare l'insieme delle n-uple $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tali che

$$P_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = P_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \ldots = P_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$$

In altri termini ciascuno dei polinomi P_i per $i = 1, 2, \ldots, r$ deve valere 0 su $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Per semplicità di notazione, siccome siamo interessati alla soluzione dei sistemi lineari, diremo semplicemente *risolvere il sistema*

$$\begin{cases} P_1(X_1, \ldots, X_n) & = & 0 \\ P_2(X_1, \ldots, X_n) & = & 0 \\ \vdots & & \\ P_r(X_1, \ldots, X_n) & = & 0 \end{cases}$$

(intendendo risolvere il sistema lineare costituito dai polinomi $P_1, \ldots, P_r$).

- Risolvere i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} 3X + Y & = & 0 \\ 5X + 2Y - 1 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3X + 9Y - 29 & = & 0 \\ X + 3Y + 39 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10X + \frac{8}{9}Y - Z & = & 0 \\ X + 13Y - 13 & = & 0 \\ Y + \frac{2}{3}Z - 11 & = & 0 \end{cases}$$

[1] Una n-upla (si legge *ennupla*) di numeri reali è un insieme di n numeri reali a cui viene dato un ordine. Per esempio dall'insieme $\{2, 5, -1, 3/7\}$ possiamo formare la 4-upla $(5, -1, 2, 3/7)$ oppure anche la 4-upla $(-1, 2, 3/7, 5)$. Quante 4-uple in tutto possiamo formare da questo insieme?