Matematica, Anno Accademico 2007-2008, Scienze Geologiche
L. Caputo, D.Iacopini, V.M. Tortorelli
Seconda prova scritta **D**
11 febbraio 2008

ISTRUZIONI

a: dopo aver scritto nome cognome e numero di matricola,

b: giustificando i principali passaggi si risolvano i seguenti esercizi riportando le soluzioni sul presente foglio:

c: l'unico da consegnare.

ESERCIZIO 1 Si studino i luoghi di zeri e il segno delle derivate parziali della funzione $f(x,y) = 2x^4 - x^2e^y + e^{4y}$ e si determinino i valori di estremo superiore ed inferiore della funzione stessa.

ESERCIZIO 2 Si calcoli l'area della superficie deteminata dalle condizioni
$z = y^2 - x^2\ ,\quad x^2 + y^2 \leq 1$

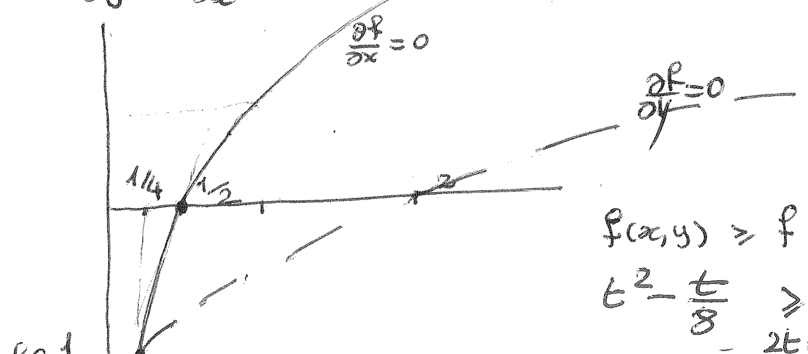
ESERCIZIO 3 Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale: $\frac{dx}{dt}(t) = \sin(x(t))$ e se ne disegnino approsimativamente i grafici i garfici.

---

1) $f(x,y) = f(-x,y)$. $x>0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} \gtrless 0 \quad 8x^3 - 2xe^y = 2x(4x^2 - e^y) \gtrless 0$ $\begin{cases} x>0 \text{ e } 4x^2 > e^y \\ x=0 \text{ o } y = 2\lg x + \lg 4 \\ 4x^2 < e^y \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial y} \gtrless 0 \quad 4e^{4y} - x^2e^y = e^y(4e^{3y} - x^2) \gtrless 0$ $\begin{cases} 4e^{3y} > x^2 \\ y = \frac{2}{3}\lg x + \frac{1}{3}\lg\frac{1}{4} \\ 4e^{3y} < x^2 \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = e^y$ e $\frac{e^y}{4} = 4e^{3y} \Leftrightarrow y = \lg\frac{1}{4}$ e $x = \frac{1}{4}$



Per $x>0$
$x \mapsto f(x,y)$ ha minimo $x = \frac{e^{y/2}}{2}$
$y \mapsto f(x,y)$ ha minimo $y = \frac{2}{3}\lg x + \frac{1}{3}\lg$

$f(x,y) \geq f\left(\frac{e^{y/2}}{2}, y\right) = \frac{e^{2y}}{8} - \frac{e^{2y}}{4} + e^{4y} = e^{4y} - \frac{e^{2y}}{8}$

$t^2 - \frac{t}{8} \underset{2t = \frac{1}{8}}{\geq} \frac{1}{(16)^2} - \frac{1}{16 \cdot 8} = -\frac{1}{(16)^2}$

$f(x,y) \geq -\frac{1}{(16)^2} = f\left(\frac{1}{4}, \lg\frac{1}{4}\right)$ QUINDI $\inf f = \min f = -\frac{1}{(16)^2}$

Poiché $f(0,y) = e^{4y}$ $\sup f = +\infty$

2) È l'area del grafico di $g(x,y) = y^2 - x^2$ su $x^2+y^2 \leq 1$: $\iint_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy =$

$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\,dy \overset{\text{c. pol}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\, d\rho\, d\varphi = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\, d\rho \overset{s=\rho^2}{=}$

$= \pi \int_0^1 \sqrt{1+4s}\, ds = \pi \frac{1}{6}\left[(1+4s)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{125} - 1\right)$

3) • Le funzioni $x(t) \equiv k\pi$ sono soluzioni costanti e non possono essere intersecate in tempo finito da altre per unicità.
• Se $x(t)$ è sol., anche $x(t+c)$ è sol. quindi le sol. sono individuate da $x(0)$: se $\sin x(0) \neq 0$ allora per quanto detto $\forall t$ $\sin x(t) \neq 0$

$1 = \frac{x'(t)}{\sin x(t)} = \frac{1}{2}\left(\log\frac{1-\cos x(t)}{1+\cos x(t)}\right)' \quad . \; t = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x(t)}{1+\cos x(t)} - \frac{1}{2}\lg\frac{1-\cos x(0)}{1+\cos x(0)}$