Esercizi 08/11/2007

1 Dominio di una funzione

Abbiamo incontrato finora alcune di quelle che si chiamano funzioni elementari, vale a dire funzioni polinomiali e trigonometriche, l'esponenziale, il logaritmo... Il modo più comune per descrivere una funzione è combinare queste funzioni elementari, moltiplicandole o dividendole fra loro, componendole... Operando questi procedimenti spesso succede di alterare il dominio delle funzioni di partenza. Facciamo degli esempi.

- Supponiamo di dividere fra loro la funzione $\sin x$ e la funzione x, ossia interessiamoci alla funzione

  $$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

  Sebbene il dominio di $\sin x$ e quello di x siano entrambi uguali a $\mathbb{R}$, è subito chiaro che in 0 la funzione f non è definita. Per cui 0 non appartiene al dominio di f. D'altra parte per qualsiasi altro numero reale x, $f(x)$ è definita, nel senso che essa coincide con il prodotto tra $\sin x$ e $1/x$ (quest'ultimo esiste appunto perché $x \neq 0$).

- Componiamo fra loro la funzione $\log(x)$ e la funzione $2x+3$. Consideriamo cioè la funzione

  $$f(x) = \log(2x+3)$$

  Siccome il dominio di log è l'insieme dei numeri reali positivi, perché f sia definita su un certo numero reale x, si dovrà avere quindi che $\log(2x+3)$ è definita, quindi $2x+3>0$. Quindi il dominio di f è l'insieme dei numeri reali che sono maggiori di $-3/2$.

- Studiare i domini delle funzioni

  $$f(x) = x + 1/x, \quad f(x) = \log(1+e^x) + \frac{x^2}{1-x}, \quad f(x) = \frac{x \log|x|}{x^2-1}$$

  $$f(x) = \frac{\tan x}{2\sin x - \sqrt{3}}, \quad f(x) = e^{\sqrt{1+\log^2 x}}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^3-x}}{|x^4-x^2|}$$

2 Asintoti

In generale, una volta stabilito il dominio della funzione, ci si può interessare al comportamento che essa assume vicino ai bordi del dominio. È bene tener presente che $+\infty$ e $-\infty$ sono bordi del dominio (qualsiasi esso sia), per cui ci interesserà anche il comportamento di f per valori molto grandi o molto piccoli. In particolare ci interessa il comportamento di f vicino a punti di bordo del dominio che non appartengono al dominio. Ricordiamo che un punto $c \in \mathbb{R}$ è di bordo per il dominio D se ci sono punti di D arbitrariamente vicini a c (c è detto anche di accumulazione per D) e punti di $\mathbb{R} \setminus D$ arbitrariamente vicini a c (c è di accumulazione per $\mathbb{R} \setminus D$). In particolare se c è di accumulazione per D e non appartiene a D allora è un punto di bordo per D. Vediamo alcune situazioni che possono presentarsi

- *Asintoti verticali.* Supponiamo che $c \in \mathbb{R}$ sia un punto di bordo per f (ossia del dominio di f) e supponiamo che

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$$

Questo intuitivamente vuol dire che il valore di f su punti arbitrariamente vicini a c ma che rimangono alla sinstra di c è arbitrariamente grande. Si dice allora che f ha un asintoto verticale sinistro a c: nel disegnare il grafico di f tracceremo una retta verticale passante per il punto $(c, 0)$ e segneremo che i valori di f vi si avvicinano (crescendo o decrescendo a seconda che il limite sia $+\infty$ o $-\infty$) da sinistra. *Mutatis mutandis*, si ottiene la definizione di asintoto verticale destro.

- *Asintoti orizzontali.* Supponiamo che esista un numero reale ℓ tale che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

Questo intuitivamente vuol dire che il valore di f su punti arbitrariamente grandi ("vicini" a $+\infty$) è arbitrariamente vicino a ℓ. Si dice allora che f ha un asintoto orizzotale: nel disegnare il grafico di f tracceremo una retta orizzontale passante per il punto $(0, \ell)$ e segneremo che i valori di f vi si avvicinano quando f è calcolata su punti molto grandi. Analogo discorso vale nel caso che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

- *Asintoti obliqui.* Veniamo ora al caso in cui

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Questo intuitivamente vuol dire che il valore di f su punti arbitrariamente grandi ("vicini" a $+\infty$) è arbitrariamente grande. In generale ci si può chiedere se f tenda all'infinito (per x che tende all'infinito) seguendo una retta. In altre parole, ci chiediamo se esistono m, $q \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0$$

Nel caso che ciò sia vero diremo che f ha un asintoto obliquo della forma $mx + q$. Nel disegnare il grafico di f tracceremo la retta $y = mx + q$ e segneremo che i valori di f vi si avvicinano quando f è calcolata su punti molto grandi. Si verifica facilmente che f ha un asintoto obliquo se e solo se esistono due numeri reali m e q tali che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = q$$

In tal caso f ha un asintoto obliquo della forma $mx + q$. In modo del tutto analogo si trattano i casi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

- Studiare gli asintoti della funzione $f(x) = x + 1/x$.
- Descrivere gli asintoti delle funzioni e^x e $\log x$, dimostrando che non possiedono alcun asintoto obliquo pur avendosi $\lim_{x\to+\infty} \log x = \lim_{x\to+\infty} = +\infty$.
- Studiare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \log(1 + e^x) + \frac{x^2}{1 - x}$$

3 Limiti all'infinito di funzioni razionali

Date due funzioni polinomiali

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$

con $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, vogliamo studiare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$

Si ha:

- se $n > m$, $a_n > 0$ e $b_m > 0$, il limite è $+\infty$;
- se $n > m$, $a_n > 0$ e $b_m < 0$, il limite è $-\infty$;
- se $n > m$, $a_n < 0$ e $b_m > 0$, il limite è $-\infty$;
- se $n > m$, $a_n < 0$ e $b_m < 0$, il limite è $+\infty$;
- se $m > n$, il limite è 0;
- se $m = n$, il limite è a_n/b_m.

Studiare il limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$

(Attenzione, se a è dispari, $x^a \to -\infty$ se $x \to -\infty$).

4 Un esercizio sul calcolo del limite

Dimostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

utilizzando che $\frac{\sin x}{x} \to 1$ se $x \to 0$ oppure lo sviluppo di Taylor del coseno.