Esercizi 14/12/2007

1 Integrazione con cambiamento di variabile

- Ricordiamo, prima di procedere con gli esercizi, il teorema di cambiamento di variabile nell'integrazione

  Teorema 1. *Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti misurabili (secondo Peano-Jordan) e sia $\varphi : U \to V$ un diffeomorfismo*[1] *tale che $|\det \varphi'|$ è limitato su U. Se $f : V \to \mathbb{R}$ è integrabile su V, allora $f \circ \varphi |\det \varphi'|$ è integrabile su U e si ha*

  $$\int_V f(y)dy = \int_U f \circ \varphi(x) |\det \varphi'(x)| dx$$

- Calcolare

  $$\int_T x^2(y - x^3)e^{y+x^3} dx\, dy$$

  dove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^3 \leq y \leq 3,\ x \geq 1\}$.
  Per calcolare l'integrale in questione, procediamo ad un cambiamento di variabili. Poniamo

  $$u(x, y) = y - x^3 \qquad v(x, y) = y + x^3$$

  Abbiamo così definito una applicazione $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cioè

  $$\psi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (y - x^3, y + x^3)$$

  Tale funzione è biiettiva: infatti la sua inversa è

  $$\psi^{-1}(u, v) = (x(u, y), y(u, v)) = (\mathrm{sgn}(u - v) \left| \frac{1}{2}(v - u) \right|^{\frac{1}{3}}, \frac{u + v}{2})$$

  Tuttavia ψ^{-1} non è ovunque derivabile con continuità (cioè ψ non è ovunque un diffeomorfismo): per il teorema di invertibilità locale sicuramente ψ^{-1} sarà derivabile con continuità in un certo (u_0, v_0) se $\psi'(x_0, y_0)$ è invertibile, dove $\psi(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$. Calcoliamo allora il determinante della matrice jacobiana di ψ: otteniamo

  $$\det \psi'(x, y) = \left| \begin{pmatrix} -3x^2 & 3x^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = -6x^2$$

  Quindi se $x \neq 0$, $\det \psi'(x, y) \neq 0$: di conseguenza ψ è un diffeomorfismo fuori dall'asse $\{x = 0\}$. Tale asse viene mandato da ψ

[1] Cioè φ è derivabile con continuità, invertibile e la sua inversa è derivabile con continuità.

nell'insieme $D = \{(u,\, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u = v\}$: in particolare ψ^{-1} è derivabile con continuità fuori dalla diagonale. Tuttavia

$$\psi(T) = \{(u,\, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq u \leq 2,\, u + 2 \leq v \leq 6 - u\}$$

e quindi $\psi(T) \cap D = \emptyset$. Possiamo quindi applicare il teorema di cambiamento di variabile, ottenendo

$$\int_T x^2(y - x^3)e^{y+x^3}dx\,dy = \int_{\psi(T)} x(u,\, v)^2 ue^v |\det \psi^{-1}(u,\, v)| du\,dv =$$

$$= \int_{\psi(T)} x(u,\, v)^2 ue^v \frac{1}{6x(u,\, v)^2} du\,dv = \int_0^2 \int_{u+2}^{6-u} ue^v du\,dv =$$

$$= \frac{e^6}{6} - \frac{2e^4}{3} - \frac{e^2}{6}$$

- Calcolare
$$\int_A \frac{1}{1 + 3x^2 + y^2} dx\,dy$$
dove $A = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3x^2 + y^2 \leq 4\}$ (si consiglia il cambiamento di variabili $x = (2/\sqrt{3})\rho\cos\theta$ e $y = 2\rho\sin\theta$: il risultato è $\frac{\pi \log 5}{\sqrt{3}}$).

2 Studio di massimi e minimi di funzioni a più variabili

- Calcolare massimi e minimi della funzione $e^{-(x^2-y+z^2)}$ sull'insieme $E = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \frac{x^2}{4} + y^2 + 3z^2 \leq 1\}$.
Vediamo se ci sono massimi o minimi nella parte interna di E: troviamo
$$\nabla f(x,\, y,\, z) = e^{-(x^2-y+z^2)}(-2x,\, 1,\, -2z)$$
Quindi non ci sono punti stazionari per f, di conseguenza f non ha massimi né minimi nella parte interna di E. Procediamo alla ricerca di eventuali massimi o minimi sul bordo, ossia su
$$\partial E = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \frac{x^2}{4} + y^2 + 3z^2 = 1\}$$
con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,\, y,\, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + 3z^2 - 1$, tali massimi o minimi vanno ricercati tra le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} \nabla f(x,\, y,\, z) &= \lambda \nabla g(x,\, y,\, z) \\ g(x,\, y,\, z) &= 0 \end{cases}$$

Otteniamo

$$\begin{cases} -2e^{-(x^2-y+z^2)}x &= \frac{\lambda x}{2} \\ e^{-(x^2-y+z^2)} &= 2\lambda y \\ -2e^{-(x^2-y+z^2)}z &= 6\lambda z \\ \frac{x^2}{4}+y^2+3z^2-1 &= 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione deduciamo che y non può valere 0. Se $x \neq 0$ e $z \neq 0$, questo sistema non ha soluzioni perché la prima, la terza e la quarta equazione danno

$$\lambda = -4e^y \qquad \lambda = -\frac{1}{3}e^y, \qquad y = \pm 1$$

che sono chiaramente incompatibili. Se $x = 0$ e $z \neq 0$, dalla seconda e terza otteniamo ($y \neq 0$)

$$\lambda = \frac{e^{-(x^2-y)}}{2y} \qquad \lambda = -\frac{1}{3}e^{-(x^2-y)}$$

ossia

$$y = -\frac{3}{2}$$

La quarta equazione dà allora

$$\frac{9}{4} + 3z^2 = 1$$

che è impossibile perché $1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4} \leq 0$. Quindi se (x, y, z) soddisfa il sistema si deve avere $z = 0$. In modo analogo si dimostra che deve anche aversi $x = 0$. Allora $y = \pm 1$ ed effettivamente $(0, 1, 0)$ e $(0, -1, 0)$ sono soluzioni del sistema. Siccome ∂E è compatto e f è continua su ∂E, essa deve assumere massimo e minimo su ∂E: calcolando i valori di f su $(0, 1, 0)$ e $(0, -1, 0)$ si ottiene che il primo è il massimo mentre il secondo è il minimo. Tali punti sono anche rspettivamente il massimo e il minimo di f su E. Infatti anche E è compatto: f ha dunque massimo e minimo su E. Tali massimo e minimo non possono essere raggiunti in punti interni a E per quanto visto in precedenza, quindi devono essere sul bordo: di conseguenza sono quelli trovati.