Matematica, Anno Accademico 2007-2008, Scienze Geologiche
V.M. Tortorelli

DIFFERENZIABILITÀ

TANGENZA A GRAFICI E DIFFERENZIABILITÀ

DEFINIZIONE Una funzione $(x, y) \mapsto f(x, y)$ si dice che ammette derivata parziale rispetto alla prima variabile nel punto (p, q) se la funzione di una variabile $t \mapsto f(t, q)$ è derivabile in p. Analogamente rispetto alla seconda variabile considerando la derivabilità in q di $t \mapsto f(p, t)$
Per più di due variabili si estende la definizone come segue $(x_1 \dots x_k) \mapsto f(x_1, \dots x_k)$ si dice che ammette derivata parziale rispetto all' $i - esima$ variabile nel punto $p = (p_1 \dots p_k)$ se la funzione di una variabile $t \mapsto f(p_1 \dots t_{i^o\ posto} \dots p_k)$ è derivabile in p_i
Nel caso per le derivate parziali si usano le notazioni $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, $D_{x_i} f(p)$, $D_i f(p)$.
DEFINIZIONE Una funzione si dice che ammette derivata direzionale nella direzione $v \in \mathbf{R}^k$, $v \neq 0$, in un punto p del suo dominio se la funzione di una variabile $t \mapsto f(p + tv)$ è derivabile in $t = 0$.
In altre parole se la restrizione della funzione alla retta passante per p e di direzione v, intesa come composizione con la parametrizzazione lineare di tale retta $t \mapsto p+tv$, risulta derivabile. In altri termini se il grafico di f intersecato il piano verticale per la retta di direzione v e passante per p è il grafico di una funzione derivabile di un avariabile.
La notazione usata $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$, $D_v f(p)$.
OSSERVAZIONE Ammettere derivata parziale rispetto alla variabile $i - esima$ è quindi la stessa cosa che avere derivata direzionale nella direzione e_i dell'$i - esimo$ asse coordinato:

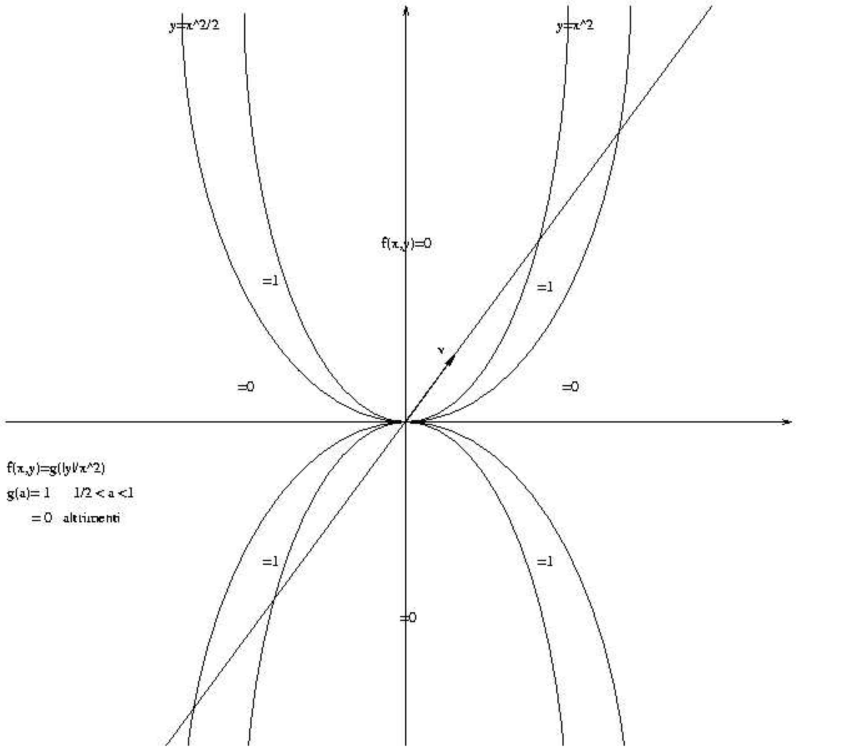
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(p)$$

OSSERVAZIONE: quindi per calcolare la derivata parziale di una funzione $f(x, y, z)$ di tre variabili rispetto alla seconda variabile nel punto $(1, 2, 3)$ si calcola la funzione in $(1, y, 3)$ e quindi si calcola la derivata di $y \mapsto f(1, y, 3)$ per $y = 2$.
OSSERVAZIONE Una funzione vettoriale ammette derivate direzionali se e solo se ciò accade per le sue componenti.

Vale la pena menzionare la seguente proprietà

PROPOSIZIONE Sia A aperto connesso per cammini. Allora una funzione f che abbia le derivate parziali nulle in ogni punto di A è costante su A.
DIM.: -dato un punto x in A vi è in una palla B_x contenuta in A di centro x.
- Due punti di una palla in A li si può collegare con una spezzata con lati paralleli agli assi. Ma la funzione ristretta a questi lati ha derivata nulla per ipotesi quindi è costante su ognuno dei lati. In particolare ha lo stesso valore nei due arbitrari punti delle palla.
- Siano p e q due punti di A e $\gamma : [0; 1] \to A$ un cammino continuo in A che li collega $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. La funzione $t \mapsto f(\gamma(t))$ è costante. Infatti posto $L = \sup\{t : f(\gamma(s)) = f(\gamma(0)) = f(p),\ s \leq t\}$ per continuità vi è un intervallo $I = [0, \delta]$ per cui $\gamma(I) \subset B_p$: quindi $L > 0$. D'altronde deve essre $L = 1$ altrimenti con analo ragionamento si trova $M = L + \delta' > L$ per cui $f(\gamma(s)) = f(p)$ per $s \leq M$.

PROBLEMA definizione elementare di tangenza di un piano L ad un insieme C in un comune punto p: detta $\pi_L(q)$ la proiezione ortogonale su L si deve avere $\lim_{q \to p,\ q \in C} \frac{dist(q,\pi(q))}{dist(p,q)} = 0$.
Non è detto che per una funzione che in un punto p abbia tutte le derivate direzionali il grafico abbia un piano tangente in $(p, f(p))$. Anzi la funzione può risultare discontinua in tale punto:



Una lieve modifica del precedente esempio (basta moltiplicare per x la funzione f) mostra che una funzione continua con tutte le derivate direzionale comunque può avere grafico senza piano tangente.

Il concetto sufficiente per avere un grafico con piano tangente è quello di *approssimazione lineare* della funzione:

DEFINIZIONE Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^m$. p *interno* ad A.
La funzione f si dice *differenziabile* in p se vi è una funzione lineare $L_p : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^m$ $((L_p(v))_i = \sum_{1\leq j\leq k} a_{ij}v_j,\ 1 \leq i \leq m$, l'approssimante lineare) per cui

$$f(x) = f(p+v) = f(p) + L_p(x-p) + \varepsilon \qquad \text{con} \qquad \lim_{x\to p} \frac{|\varepsilon|}{|x-p|}$$

Nel caso si usa la notazione $L_p = df_p$: tale applicazione lineare si dice *differenziale* di f in p
Per esemplificare nel caso $k = 2$, $m = 1$, $p = (x_0, y_0)$ devono esistere due numeri a, b per cui

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

il differenziale di f in p è quindi l'applicazione lineare $(u, v) \mapsto au + bv = (a, b) \cdot (u, v)$
OSSERVAZIONE: immediatamente confrontando le definizioni nel caso $k = 1$ si ha che una funzione vettoriale di una variabile è differenziabile se e solo se è derivabile
OSSERVAZIONE: se la funzione è differenziabile in un punto allora esistono tutte le derivate parziali: per l'oseravzione precedente e la definizione di differenziabilità con $x = p + te_i$
Si ottiene che $(df_pv)_i = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)v_j$. Ovvero la matrice associata all'applicazione lineare differenziale è qualla che ha come righe le derivate parziali delle funzioni componenti.
Analogamente se f è differenziabile in p allora ha le derivate direzionali in p e $\frac{\partial f}{\partial v}(p) = df_pv$
NOTAZIONE: nel caso $m = 1$ se una funzione è differenziabile in p il vettore con componenti le derivate parziali si dice *gradiente* della funzione nel punto e si scrive $\nabla f(p)$. Le derivate direzionali sono quindi $v \cdot \nabla f(p)$
In generale la matrice con m righe e k colonne associata al differenziale di una funzione da $\mathbf{R}^k$ in $\mathbf{R}^m$, $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq k}}$ si dice *matrice Jacobiana.*

OSSERVAZIONE Per una funzione differenziabile a valori reali $\nabla f(p)$ se *non nullo* da la *direzione di massima crescita della funzione nel punto*: ovvero

$\max_{|v|=1} \lim_{t\to 0, t>0} \frac{f(p+tv)-f(p)}{t} = |\nabla f(p)|$

TEOREMA 1 Se $f : A \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ è differnziabile in p allora il grafico di f ha nel punto $(p, f(p))$ un piano k dimensionale tangente che è il grafico traslato nel punto $(p, f(p))$ della funzione lineare differenziale in p: cioè il grafico di $x \mapsto f(p) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)(x_j - p_j)$.

Per esemplificare nel caso $k = 2$ ed $m = 1$, funzioni di due variabili a valori reali, il piano tangente al grafico in $(p, q, f(p, q))$ è il grafico della funzione lineare affine

$(x, y) \mapsto f(p, q) + \frac{\partial f}{\partial x}(p,q)(x - p) + \frac{\partial f}{\partial y}(p,q)(y - q)$. Come luogo di zeri in $\mathbf{R}^3$ è

$\frac{\partial f}{\partial x}(p.q)x + \frac{\partial f}{\partial y}(p,q)y - z - \frac{\partial f}{\partial x}(p,q)p - \frac{\partial f}{\partial y}(p,q)q + f(p, q) = 0$

Per il calcolo effettivo utilizzando le derivate parziali e la verifica che una funzione è differenziabile una condizione sufficiente, se pur non necessaria, è data dal seguente teorema

TEOREMA 2 (Differenziale totale) Si consideri una funzione che ha tutte le derivate parziali in una palla di centro un punto interno p del suo dominio di definizione. Se le derivate parziali sono continue nel punto p allora la funzione è differnziabile almeno nel punto stesso.

TEOREMA 3 Un funzione differenziabile in p è continua in p.

DEFINIZIONE Sia A aperto di $\mathbf{R}^k$. Sia f una funzione a valori in $\mathbf{R}^m$ differenziabile in ogni punto di A. La funzione che associa ad un punto di A il differenziale di f in quel punto si dice funzione differenziale o funzione tangente alla funzione f. Identificando lo spazio vettoriale delle funzioni lineari da $\mathbf{R}^k$ in $\mathbf{R}^m$ con $\mathbf{R}^{mk}$ la funzione differenziale è individuata dalla funzione da A in $\mathbf{R}^{mk}$ data da $x \in A \mapsto (D_1 f_1(x), \ldots D_k f_1(x), \ldots, D_1 f_m(x) \ldots D_k f_m(x))$

REGOLE PER LE FUNZIONI DIFFERENZIABILI

Dalla derivabilità delle funzioni elementari di una variabile, dai seguenti asserti e dal teorema del differenziale totale si può riconoscere la differenziabiltà di molte funzioni

PROPOSIZIONE Le funzioni costanti sono diffrenziabili in ogni punto e il loro differnziale è la funzione lineare nulla.

PROPOSIZIONE Le funzioni lineari affini

$(x_1 \ldots x_k) \mapsto (a_{11}x_1 + \ldots a_{1k}x_k + b_1, \ldots a_{m1}x_1 + \ldots a_{mk}x_k + b_m) = Ax + b =: f(x)$

sono differenziabili in ogni punto p il loro differenziale è indipendente dal punto ed è la parte lineare della funzione stessa $df_p(v) = (a_{11}v_1 + \ldots a_{1k}v_k, \ldots a_{m1}v_1 + \ldots a_{mk}v_k) = Av$.

In effetti nel caso si ha $f(x) = f(p) + A(x - p)$ con resto nullo, ovvero per funzioni a valori reali di due variabili affini $ax + by + c$ le derivate parziali sono rispettivamente le funzioni costanti a e b che sono ovviamente continue.

PROPOSIZIONE Il prodotto di due funzioni a valori reali differnziabili in p è differnziabile in p e vale la formula analoga a quella delle derivate: $d(f \cdot g)_p = f(p)dg_p + g(p)df_p$

TEOREMA 4 (Differenziale di una funzione composta, Regola della catena)

Siano $f : A \subseteq \mathbf{R}^k \to B \subseteq \mathbf{R}^m$, $g : B \to \mathbf{R}^h$, $y = f(x)$

Se g è differenziabile in $y = f(p)$ ed f è differnziabile in $x = p$ allora la funzione composta $g\circ f$, $x \mapsto g(f(x)) =: g\circ f(x) : A \to \mathbf{R}^h$ è differenziabile in p.

Il suo differenziale è dato dall'iterazione dei differenziali: $dg\circ f_p(v) = dg_{f(p)}(df_p(v))$

In particolare vale la seguente regola della catena per le derivate parziali:

$$\frac{\partial g(f(x))}{\partial x_i}(p) = \sum_{1\leq j\leq m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(p))\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) = \sum_{1\leq j\leq m} \frac{\partial g}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

COROLLARIO Se f e df_p sono invertibili allora vi è $df^{-1}_{f(p)} = (df_p)^{-1}$

OSSERVAZIONE: ne segue che le funzioni differenziabili su un dato insieme a valori in $\mathbf{R}^m$ sono uno *spazio vettoriale*: per esempio $x \mapsto f(x) + g(x)$ si vede come composizione di $(u, v) \mapsto u + v$ con $x \mapsto (f(x), g(x))$.

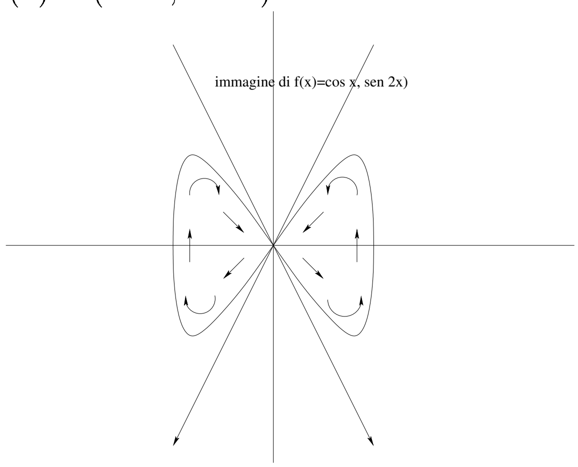
TANGENTE AD IMMAGINI

Come già osservato, data una funzione vettoriale di una variabile derivabile (cammino regolare) $x \mapsto f(x)$ se per un valore del parametro z si ha $f'(z) \neq 0$ allora *l'immagine* di un intervallo sufficientemente *piccolo* attorno a z ha tangente nel punto $f(z)$ data dall'immagine del cammino lineare $t \mapsto f(z) + tf'(z)$. In effettti poichè vi è differenziabilità $f(x) = f(z) + f'(z)(x-z) + \varepsilon$ con $|\varepsilon|/|x-z| \to 0$ per $x \to z$, si ha quindi confrontando la distanza tra un punto dell'immagine dalla sua proiezione ortogonale sulla retta in questione:

$$\frac{\left|f(x) - \left(\left((f(x)-f(z)) \cdot \frac{f'(z)}{|f'(z)|}\right)\frac{f'(z)}{|f'(z)|} + f(z)\right)\right|}{|f(x)-f(z)|} = \dots = \frac{\left|\varepsilon - \left(\varepsilon \cdot \frac{f'(z)}{|f'(z)|}\right)\frac{f'(z)}{|f'(z)|}\right|}{|f'(z)(x-z)+\varepsilon|} \leq \frac{2|\varepsilon|}{|f'(z)(x-z)+\varepsilon|} \to 0$$

(analogamente si prova che il grafico di una funzione diffrenziabile ha piano tangente)

- Se in un punto $f(y)$ "ci si ferma" ("velocità " nulla $f'(y) = 0$) in effetti si può ripartire con inclinazione diversa: *e.g.* $f(x) = (x^3, |x|x^2)$, $x = y = 0$, la cui immagine è il grafico del modulo che non ha una sola tangente in $(0,0)$.
- D'altronde un cammino può ripassare con diversa inclinazione per punti ove è "già " passato, per questo il vettore derivata nonnullo da la tangente solo all'immagine di un segmento abbastanza piccolo: *e.g.* $f(x) = (\cos x, \sin 2x)$



"passa" da $(0,0)$ sia per $x = y_1 = \pi/2$ che per $x = y_2 = 3\pi/2$ ma con velocità sghembe.
Un analogo fenomeno se il cammino è definito su un intervallo senza uno degli estremi: per x che tende all'estremo mancante il cammino si può avvicinare indefinitivamente ad un tratto già percorso.
- Per un cammino derivabile con derivata sempre nonnulla definito su un *intervallo chiuso e limitato* ed iniettivo vi è quindi tangente in ogni punto dell'immagine. Il grafico di una funzione di una variabile $x \mapsto g(x)$ derivabile può essere visto come immagne di un cammino vettoriale $x \mapsto f(x) = (x, g(x))$ che è sempre iniettivo e con vettore derivata $f'(x) = (1, g'(x))$ sempre nonnullo.
Quindi per il grafico di una funzione f di più variabili differenziabile in un punto p i cammini $t \mapsto (p + tv, f(p + tv))$ hanno immagini con tangente nel punto $(p, f(p))$ data dalla retta $s \mapsto (p + sv, f(p) + s\frac{\partial f}{\partial v}(p)) = \frac{d(p+tv, f(p+tv))}{dt}(s)$.

- Per le *immagini* di funzioni vettoriali f di più variabili differenziabili vale il seguente:

TEOREMA 5 (del rango) Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^{k+h}$ con derivate parziali continue. Se la matrice del differenziale df_p ha *rango massimo* (l'immagine dell'applicazione lineare $(t_1 \dots t_k) \mapsto df_p(t_1 \dots t_k)$ ha dimensione k) vi è una palla $B_r(p)$, centro p e raggio r , per cui:

1- l'immagine della palla $f(B_r(p))$ è grafico di una funzione differenziabile con derivate continue rispetto al k-piano per l'origine di $\mathbf{R}^m$ immagine del differenziale (*localmente grafico)*
2- il k-piano tangente in $f(p)$ a $f(B_r(p))$ è il traslato di questo

$$f(p) + t_1 \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(p) \dots + t_k \tfrac{\partial f}{\partial x_k}(p) = f(p) + df_p(t_1 \dots t_k)$$

cioè i vettori delle derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots \frac{\partial f}{\partial x_k}(p)$ sono base del k-piano tangente in $f(p)$. Per superficie in $\mathbf{R}^3$ $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ il tangente in $f(p)$ in coordinate cartesiane è dato dalla condizione di ortogonalità $((x,y,z) - f(p)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = det\Big((x,y,z) - f(p), \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)\Big) = 0$

TANGENTE A LUOGHI DI ZERI

Se si considera l'insieme di livello $C = \{x : f(x) = f(p)\}$ di una funzione a valori reali differenziabile in un punto p si può considerare un cammino derivabile $\gamma : [-1, 1] \to C$ tutto in C che all'istante $t = 0$ passi per p con velocità v non nulla $(\gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = v)$.
Poichè tale cammino sta in C la funzione $t \mapsto f(\gamma(t))$ risulta essere costante e quindi la sua derivata è nulla: per cui si ottiene che $\gamma_1'(0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \ldots + \gamma_k'(0)\frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = 0$ cioè si ottiene che $\nabla f(p)$ è ortogonale a tutte le direzioni tangenti a curve che giacciono su $\{f(x) = f(p)\}$. Quindi necessariamente se l'insieme di livello avesse un piano tangente in p questo dovrebbe essere l'ortogonale alla direzione individuata dal vettore $\nabla f(p)$.

Il seguente teorema asserisce che per una funzione differenziabile con derivate continue se $\frac{\partial f}{\partial v}(p) \neq 0$ allora l'insieme che passa per p ove f è costante, $\{x : f(x) = f(p)\}$, "vicino a p" é il grafico di una funzione con derivate continue rispetto all'iperpiano ortogonale alla direzione v. Per comodità nel prossimo enunciato si considera come direzione quella dell'ultima coordinata, e, dato $x = (x_1, \ldots x_k) \in \mathbf{R}^k$, si pone $x' = (x_1, \ldots x_{k-1})$, $x'' = x_k$, identificando x con (x', x'').

TEOREMA 6(Teorema del Dini delle funzioni implicite) Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ con derivate parziali continue.
Se $\frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \neq 0$ allora vi sono: $R > 0$, $r > 0$, $\varphi : B_R(p') \to [p_k - r, p_k + r] = B_r(p'')$ per cui:

1- $x_k = x'' = \varphi(x') \Leftrightarrow |x'' - p''| \leq r$ e $f(x) = f(x', x'') = f(p)$

2- φ è differenziabile con derivate continue e dalla regola della catena si ha

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i}(p') = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p') = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)}{\frac{\partial f}{\partial x_k}(p)}$$

COROLLARIO Nelle precedenti ipotesi l'insieme $\{x : f(x) - f(p) = 0\}$, luogo di zeri, ha piano tangente in p dato dal luogo di zeri del differenziale traslato in p:
$(x_1 - p_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \ldots + (x_k - p_k)\frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = (x - p) \cdot \nabla f(p) = df_p(x - p) = 0$

OSSERVAZIONE: i seguenti esempi mostrano che le precisazioni nell'enunciato sono necessarie. Con $k = 2$ e $f(x, y) = x^2 - y^2$, $p = (0, 0)$ il livello zero della funzione è dato da due rette incidenti che non sono grafico rispetto ad alcuna direzione in nessun rettangolo contenente p . Con $f(x, y) = x - \sin y$ si vede che è necessario restringere il luogo di zeri anche nella direzione dei valori della funzione implicita perchè sia un grafico. Con $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $p = (0, 1)$ si vede che è necessario restringersi nel dominio.
OSSERVAZIONE: se la derivata direzionale rispetto a v è nonnulla in p allora il livello della funzione per p in un "cilindro retto" con altezza parallela a v è un grafico

Più in generale vale il seguente teorema delle funzioni implicite che permette di identificare i tangenti agli insimei di soluzioni di sistemi di equazioni. Il precedente teorema rientra nel seguente enunciato con $m = 1$ e $h = (k - 1)$.

Si introducono le seguenti notazioni:

Se $f : A \subseteq \mathbf{R}^{m+h} \to \mathbf{R}^m$ e $x_{j_1}, \ldots x_{j_m}$ sono m distinte variabili tra quelle di $x = (x_1 \ldots x_k)$ con $\frac{\partial f}{\partial(x_{j_1} \ldots x_{j_m})}(p)$ si indica $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{j_r}}(p)\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq r \leq m}}$, la matrice quadrata $m \times m$ estratta dalla matrice Jacobiana di f scegliendo solo le colonne delle derivate rispetto alle m variabili prescelte.

Se $x \in \mathbf{R}^{m+h}$ si identifica con (x', x''), ove $x' \in \mathbf{R}^h$ sono le prime h coordinate di x e $x'' \in \mathbf{R}^m$ le ultime m coordinate di x.

TEOREMA 7 Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^{m+h} \to \mathbf{R}^m$ con derivate continue.
Se df_p ha rango massimo, ovvero la sua immagine ha dimensione m,
per esempio $det\left(\frac{\partial f}{\partial x_{1+h}}(p) \dots \frac{\partial f}{\partial x_{m+h}}(p)\right) \neq 0$ allora vi sono:

$R > 0$, $r > 0$, $\varphi : B_R(p') \to B_r(p'')$ per cui:

1- $x'' = \varphi(x')$ $(x_{h+j} = \varphi_j(x_1 \dots x_h),\ 1 \leq j \leq m) \Leftrightarrow |x'' - p''| \leq r$ e $f(x) = f(x', x'') = f(p)$

2- φ è differenziabile con derivate continue. Poichè $x' \mapsto f(x', \varphi(x'))$ è costante ha derivate nulle, dalla regola della catena si ha considerando le funzioni coordinate di f e φ come colonne
$\frac{\partial f_r}{\partial x_i} + \sum_{1\leq j\leq m} \frac{\partial f_r}{\partial x_{h+j}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = 0$ cioè $\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial (x_{h+1} \dots x_{h+m})} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$ quindi $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\left(\frac{\partial f}{\partial (x_{h+1} \dots x_{h+m})}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}$

e dalla regola di Cramer si ha $\frac{\partial x_{h+j}}{\partial x_i}(p') = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(p') = -\frac{det \frac{\partial f}{\partial (x_{h+1} \dots {}_{j^o\ posto}\ x_i \dots x_{h+m})}(p)}{det \frac{\partial f}{\partial (x_{h+1} \dots x_{h+m})}(p)}$

OSSERVAZIONE: a meno di un cambiamento di coordinate si ha che se il differenziale df_p ristretto ad un sottospazio W di dimensione m risulta invertibile, considerato V il sottospazio di dimensione h per cui ogni $x \in \mathbf{R}^{h+m}$ sè eguale a $x_v + x_w$ con $x_v \in V$ e $x_w \in W$ e $x_v \cdot x_w = 0$ allora vi sono R, r per cui $\{f(x) = f(p)\} \cap (V \cap B_R(p_v) \times W \cap B_r(p_w))$ è il grafico rispetto a V di una funzione φ e $d\varphi_{x_v} = -\left(\frac{\partial f}{\partial W}(x)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial V}(x)$

TEOREMA DI INVERTIBILITÀ LOCALE

Il caso limite dei teoremi di rango e delle funzioni implicite è il seguente teorema:

TEOREMA 8: (Invertibilità Locale) Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ con derivate continue
$x \mapsto f(x) = y$.
Se df_p è un'applicazione lineare invertibile ($det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq m}} \neq 0$) allora vi è $R > 0$ per cui :

1- $B_R(p) \subseteq A$, f ristretta a $B_R(p)$ è invertibile, $f(p)$ è interno a $f(B_R(p))$

2- quindi detta g $(y \mapsto g^{-1}(y) = x)$ la restrizione di f si ha

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{\partial (g^{-1})_i}{\partial y_j}(y) = (-1)^{i+j} \frac{det \frac{\partial (f_1 \dots f_{j-1}, f_{j+1} \dots f_m)}{\partial (x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_m)}(g^{-1}(y))}{det \frac{\partial f}{\partial (x_1 \dots x_m)}(g^{-1}(y))} = (-1)^{i+j} \frac{det \frac{\partial (y_1 \dots y_{j-1}, y_{j+1} \dots y_m)}{\partial (x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_m)}}{det \frac{\partial y}{\partial x}}$$