Matematica, Anno Accademico 2006-2007, Scienze Geologiche
INTEGRAZIONE: M.Novaga, V.M. Tortorelli
9-16 gennaio 2007

http://WWW.dm.unipi.it/didactics/home.html -> ALTRI CORSI DI LAUREA -> Corso di laurea *****

RIEMANN INTEGRABILTÀ E SOMMABILITÀ IN SENSO GENERALIZZATO

Misurabilità alla Peano-Jordan

- Un n-rettangolo (cartesiano) in $\mathbf{R}^n$ è il prodotto cartesiano di n intervalli: $R = I_1 \times \dots I_n$, I_i, $1 \le i \le n$ intervalli limitati con o senza estremi inclusi in $\mathbf{R}$.
- La misura elementare di un n rettangolo è il prodotto delle differenze degli estremi dei lati.

Definizione se $A \subset \mathbf{R}^n$ non vuoto e *limitato* si dice *misurabile secondo Peano-Jordan* se i seguenti numeri coincidono:

$\sup \sum_{R\in\mathcal{F}} me(R)$: al variare di $\mathcal{F}$ famiglia *finita* di rettangoli disgiunti contenuti in A (approssimazione interna)

$\inf \sum_{R\in\mathcal{G}} me(R)$: al variare di $\mathcal{G}$ famiglia *finita* di rettangoli con unione contenente A (approssimazione esterna)

Nel caso il valore si dice misura (n-dimensionale) di Peano-Jordan: $m(A)$, $m_n(A)$. Si ha:
• $m(\emptyset) = 0$, • $m(R) = me(R)$ se R è rettangolo cartesiano, • $m(A) \le m(B)$ se $A \subseteq B$,
• se A e B hanno misura la hanno $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$ e $m(A\cup B) = m(A)+m(B)-m(A\cap B)$

Integrabilità alla Riemann Una funzione *limitata* f a valori in $\mathbf{R}$ si dice Riemann integrabile su un n-rettangolo Q (nulla fuori da Q) se i seguenti numeri coincidono:

$\sup \sum_{R\in\mathcal{F}} \inf_R f me(R)$: al variare di $\mathcal{F}$ famiglia *finita* di rettangoli con parti interne disgiunte con unione Q
(approssimazione inferiore)

$\inf \sum_{R\in\mathcal{G}} \sup_R f me(R)$: al variare di $\mathcal{G}$ famiglia *finita* di rettangoli con unione Q
(approssimazione superiore)

In tal caso il comune valore si dice integrale di Riemann di f su Q e si indica con $\int_Q f(x)dx$.

Osservazione A è P.-J. misurabile se e solo se χ_A è R.-integrabile e $m(A) = \int \chi_A$.

Teorema 1.i- se $f \ge 0$ allora f è R.-integrabile su Q se e solo se il suo sottografico su Q è P.J.-misurabile in $\mathbf{R}^{n+1}$. Nel caso $m_{n+1}(\{(x,y) :\ x \in Q,\ 0 \le y \le f(x)\}) = \int_Q f(x)dx$.

DOMINIO NORMALE O SEMPLICE RISPETTO A y

ii- una funzione continua f su un rettangolo chiuso R è R.-integrabile.
• Dai teoremi degli zeri e di Weiestrass segue: vi è $\xi \in R$ per cui $\frac{1}{m(R)} \int_R f dx = f(\xi)$.

iii- se f e g sono R.-integrabili tale è fg.
• Se $g = \chi_A$ l'integrale di questo prodotto si indica con $\int_A f(x)dx$.
Una funzione costante $f(x) = 14$ su A misurabile è integrabile e $\int_A f = 14m(A)$

Osservazione - I razionali tra 0 ed 1 non sono un insieme misurabile: non contendeno alcun intervallo la misura interna è nulla mentre ogni intervallo contiene un razionale quindi la misura esterna è 1.
- Vi sono sottoinsiemi del piano non limitati per cui i limiti delle misure delle loro intersezioni con quadrati sempre più grandi sono finiti: *e.g.* si consideri l'unione dei rettangoli di basi rispettive $[n-1, n]$ e altezza $\frac{1}{2^{n-1}}$. La somma delle prime N aree è $1 + 1/2 + \dots 1/2^{N-1} = 2(1 - 1/2^N) \to 2$
- Analogamente vi sono funzioni non limitate per cui i limiti degli integrali delle "troncate " sono finiti: *e.g.* si consideri la funzione il cui sottografico è l'insieme del precedente esempio ruotato di $\pi/2$.

Conviene quindi estendere il concetto di integrale e di misura a funzioni e domini non limitati come segue:

Sommabilità.

- Una una funzione a valori reali *non negativa* f si dice *sommabile* in senso generalizzato se:

  - $\forall m \in \mathbf{N}$ $f \wedge m$ è R.-integrabile su $[-m;m]^n$, - $\lim_{m\to\infty} \int_{[-m;m]^n} f(x) \wedge m dx \in \mathbf{R}$.

Tale limite si dirà integrale in senso generalizzato e si indicherà con $\int f dx$.

Una funzione a valori reali si dice sommabile se lo sono la sua parte positiva $\max\{f(x), 0\}$ e la sua parte negativa $\max\{-f(x), 0\}$. Il suo integrale in senso genaralizzato sarà la differenza tra quelli delle sue parti.

• Una funzione a valori vettoriali si dirà sommabile se lo sono le sue componenti. Nel caso l'integrale sarà dato dal vettore degli integrali delle componenti.

Teorema 2. Proprietà principali

1- le funzioni sommabili formano uno spazio vettoriale e l'integrale è un funzionale lineare;

2- il minimo e il massimo tra due funzioni sommabili sono anch'essi sommabili (reticolo),

- se $f \geq g$ allora $\int f \geq \int g$ (monotonia dell'integrale),

3- $|\int f| \leq \int |f|$ (diseguaglianza triangolare),

4 - se A e B sono misurabili in senso generalizzato tali sono $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$ (semialgebra),

- se f è sommabile sull'unione allora $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f$ (additività).

NOTA: se f e g sono sommabili non è detto che il loro prodotto lo sia: e.g. $f{=}g{=}\frac{1}{\sqrt{x}}$. Se una delle due è limitata si.

5- $\int f(x+v)dx = \int f(x)dx$ (invarianza per traslazioni).

6- TEOREMA DI FUBINI-TONELLI Posto $x = (x', x'') \in \mathbf{R}^n$, con $x' \in \mathbf{R}^k$, $x'' \in \mathbf{R}^{n-k}$ se:

  - $x \mapsto f(x)$ è sommabile in $\mathbf{R}^n$
  - e per ogni $x'' \in \mathbf{R}^{n-k}$ la $x' \mapsto f(x', x'')$ è sommabile in $\mathbf{R}^k$, allora:
  - $x'' \mapsto \int f(x', x'')dx'$ è sommabile in $\mathbf{R}^{n-k}$ e $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^{n-k}} \left(\int_{\mathbf{R}^k} f(x', x'')dx'\right) dx''$.

Osservazione per integrare funzioni continue su insiemi compresi tra grafici di funzioni continue (con un una variabile in meno) definite a loro volta su insiemi dello stesso tipo fino ad arrivare a sottoinsiemi del piano compresi tra grafici di funzioni continue su un intervallo, il teorema di Fubini Tonelli iterato permette la riduzione degli integrali di più dimensioni ad *integrali iterati di una variabile, e.g.*

$$\int_{g(x,y)\leq z\leq f(x,y),\ h(x)\leq y\leq k(x),\ a\leq x\leq b} \varphi(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{k(x)} \left(\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \varphi(x,y,z)dz\right) dy\right) dx$$

7- TEOREMA DI CAMBIAMENTO DI VARIABILE: Sia $\Phi : y \in A \mapsto x = \Phi(y) \in \Phi(A)$ *iniettiva*, differenziabile con continuità, A e $\Phi(A)$ siano aperti misurabili di $\mathbf{R}^n$ e $d\Phi_y$ sia sempre invertibile. Allora se $x \mapsto f(x)$ è sommabile su $\Phi(A)$:

  - $y \mapsto f(\Phi(y)) \left|det\frac{\partial\Phi}{\partial y}(y)\right|$ è sommabile su A
  - $\int_{\Phi(A)} f(x)dx = \int_A f(\Phi(y)) \left|det\frac{\partial\Phi}{\partial y}(y)\right| dy.$ $\qquad \left(dx = \left|det\frac{\partial\Phi}{\partial y}(y)\right| dy\right).$

• Ne segue l'invarianza per rotazione e riflessione della misura.

Nel caso di integrali di funzione di una variabile è più conveniente enunciare il seguente teorema per funzioni non iniettive, di dimostrazopne molto più semplice:

Teorema 3. - CAMBIAMENTO DI VARIABILE ORIENTATO, SOSTITUZIONE Sia Φ : $y \in [a,b] \mapsto x = \Phi(y) \in [\alpha, \beta]$ solo con *derivata continua* ed f continua. Allora:

$$\text{segno}\,(\Phi(b) - \Phi(a)) \int_{[\min\{\Phi(a),\Phi(b)\},\max\{\Phi(a),\Phi(b)\}]} f(x)dx = \int_{[a,b]} f(\Phi(y))\Phi'(y)dy$$

Osservazione Per funzioni di una variabile si può facilmente parlare di integrali *orientati* considerando un senso di percorrenza del segmento ove si integra e cambiando segno all'integrale. Per questo se $a < b$ si usano le seguenti notazioni

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx\ , \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Quindi la precedente formula si scrive $\displaystyle\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\Phi(y))\Phi'(y)dy$

INTEGRAZIONE NON ORIENTATA SU CURVE E SUPERFICIE

Lunghezza - Si dice *lunghezza di un cammino* $\gamma : [a;b] \to \mathbf{R}^n$ continuo

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sup\{\sum_{i=0}^{N-1} dist(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) : \ a = t_0 < t_1 < \dots t_N = b\}$$

• Se $\gamma(t) = \varphi(h(t))$, $h : [c;d] \to [a;b]$ continua, monotona surgettiva allora $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\varphi)$.

NOTA: intuitivamente la lunghezza definita non corrisponde alla misura dell'immagine ma alla misura del percorso fatto. Per cammini che si autointersecano in un numero finito di punti da proprio una misura dell'immagine.

Teorema 4 Se $\gamma : [a;b] \to \mathbf{R}^n$ è C^1 a tratti $\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$

Definizione - Si dice *k-superficie (parametrica) regolare* una funzione $\psi : A \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ ove $A = \overline{\mathring{A}}$ è connesso, e $k \leq n$, per cui:

i- la ψ è restrizione di una funzione con derivate continue su $\mathbf{R}^k$

ii- i vettori $\frac{\partial \psi}{\partial t_1}, \dots \frac{\partial \psi}{\partial t_1}$ generano un sottospazio di dimensione k in $\mathbf{R}^n$ (tangente all'immagine): ovvero vi siano k indici $m_1, \dots m_k$ per cui $det(\frac{\partial \psi_{m_i}}{\partial t_j})_{1 \leq i,\ j \leq k} \neq 0$

- Una superficie parametrica si dirà *semplice* se è iniettiva.

Una $fA \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^{n-k}$ che sia C^1 intorno alla chiusura di A da naturalmente una k-superficie che parametrizza il suo grafico $x \mapsto \psi(x) = (x, f(x))$

Integrazione non orientata di funzioni su superficie parametrica Sulla falsariga del teorema di cambiamento di variabile negli integrali multipli, considerando la corrispondenza tra somma dei determinanti minori $k \times k$ di k vettori in $\mathbf{R}^n$ e k-volume del k-parellepipedo da essi generato si definisce per una k-superficie ψ il suo k volume come "somma infinita" dei k-volumi dei parellelpipedi "infinitesimi tangenti" dati dall'approssimazione lineare

$$Vol_k(\psi) = \int_A \sqrt{det \ {}^t\frac{\partial \psi}{\partial t} \ \frac{\partial \psi}{\partial t}} dt = \int_A \sqrt{\sum_{1 \leq m_1 < \dots m_k \leq n} det \left(\frac{\partial \psi_{m_i}}{\partial t_j}\right)^2} dt_1 \dots dt_k$$

$dVol_k = \sqrt{det \ {}^t\frac{\partial \psi}{\partial t} \ \frac{\partial \psi}{\partial t}} dt$; nel caso di grafici $\psi(t) = (t, f(t))$ si ha in particolare: $dVol_k = \sqrt{1 + |\nabla f(t_1, \dots t_k)|^2}$

NOTA: per una superficie semplice in effetti ciò corrisponde all'dea intuitiva di misura della sua immagine. Altrimenti tale nozione tiene conto delle diverse "sovrapposizioni" (su sottoinsiemi di misura non nulla del dominio) date dalla parametrizzazione.

- Data una funzione continua g sull'immagine di una k-superficie ψ condominio misurabile:

$$\int_\psi g dVol_k = \int_A g(\psi(t_1, \dots t_k)) \sqrt{\sum_{1 \leq m_1 < \dots m_k \leq n} det \left(\frac{\partial \psi_{m_i}}{\partial t_j}\right)^2} dt_1 \dots dt_k$$

- Nel caso di ipersuperficie che sia un grafico $\psi(t) = (t, f(t))$ ovvero $k = n-1$ e $f : A \subseteq \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$, si ottiene: $\int_\psi g dVol_k = \int_A g(t_1, \dots t_k, f(t_1 \dots t_k)) \sqrt{1 + |\nabla f(t_1, \dots t_k)|^2} dt_1 \dots dt_k$

- Nel caso di cammini C^1 a tratti, si ottiene: $\int_\gamma g d\mathcal{L} = \int_a^b g(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$

• Se $h : D \subseteq \mathbf{R}^k \to A \subset \mathbf{R}^k$ è un cambiamento di variabile regolare (con A e D misurabili e h iniettiva con differenziale invertibile) dal teorema di cambiamento di variabile segue che gli integrali rispetto a una superficie $t \mapsto \psi(t)$ su A sono eguali a quelli rispetto alla superficie $s \mapsto \psi(h(s))$.Questa proprietà garantisce che la definizione non dipende " dalla parametrizzazione".

- Nel caso di un insieme C unione di pezzi che si intersecano solo su parti di dimensione minore e parametrizzati da (immagini di) k-superficie semplici ha quindisenso scrivere $\int_C g(P)dVol_k$ intendendo la somma degli integrali delle singole superficie componenti

DEFINIZIONE: Una funzione $x \mapsto F(x)$ definita su un intervallo I si dice *primitiva sull'intervallo* di una funzione $x \mapsto f(x)$ se: F è derivabile su I e $F' = f$ su I. La *famiglia delle primitive di* f su un intervallo si indica con $\int^x f$.
- Due primitive su un intervallo differiscono per una costante, avendo appunto la stessa derivata.
TEOREMA [FONDAMENTALE DEL CALCOLO: area calcolata con le primitive]
Se f è continua su $[a;b]$ allora:
i- La funzione integrale $\int_a^x f(y)dy$ è una primitiva
ii- per ogni altra F primitiva di f su $[a;b]$ si ha: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
- [PRIMITIVE DI BASE]

$f(x)$	$\int^x f = F(x)$
e^x	$e^x + a$
$f = x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$a + \log x$ se $x > 0$ $b + \log(-x)$ se $x < 0$
$\cos x$	$\sin x + a$
$\sin x$	$-\cos x + a$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$a_k + \tan x$ se $x \in]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}[$, $k \in \mathbf{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$a + \mathrm{artan} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$a + \mathrm{arsin} x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$a + \log(x + \sqrt{1+x^2})$ l'inversa di arcosenoiperbolico: $\mathrm{arsinh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

- [SOSTITUZIONE] *regola della catena* $F(x) = G(t(x))$: $f(x) = \frac{dG}{dt}(t(x))\frac{dt}{dx}(x)$, $t = t(x)$:
[SOSTITUZIONE INVERSA] $G(t) = F(x(t))$: $f(x(t)) = \frac{dG}{dt}(t)\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^{-1}$, $x = x(t)$, $dx = \frac{dx}{dt}(t)dt$ per avere la risposta bisogna quindi trovare l'inversa di $t \mapsto x(t)$:
- [PARTI] *derivata di un prodotto* $F' = G'H = (GH)' - GH'$
- [RAZIONALI SEMPLICI]
PROPOSIZIONE - Ogni polinomio reale in una variabile si esprime come prodotto di fattori del tipo: a, $(x-b)^n$, $((x-c)^2 + d^2)^m$, ove i b sono le radici reali, e la somma degli n e dei $2m$ il grado del polinomio.
- Quindi un rapporto di polinomi, con denominatore di grado maggiore, si scrive come somma di addendi dei seguenti tipi: a, $\dfrac{a}{(x-b)^n}$, $\dfrac{a}{((x-c)^2+d^2)^m}$, $\dfrac{ax}{((x-c)^2+d^2)^n}$
Ci riduce mediante una cambiamento di variabile affine al calcolo delle seguenti primitive

$$\frac{1}{x^n} \mapsto \begin{cases} \begin{cases} \log x + a & x > 0 \\ \log(-x) + b & x < 0 \end{cases} & n = 1 \\ -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + a & n > 1 \end{cases} \qquad \frac{x}{(x^2+1)^n} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}\log(1+x^2) + a & n = 1 \\ -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + a & n > 1 \end{cases}$$

$$I_1 =: \int^x \frac{1}{1+x^2} \mapsto \mathrm{artan} x + a,$$

$$I_n =: \int^x \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_{n-1} - \int^x \frac{x^2}{(x^2+1)^n} = I_{n-1} - \left(-\frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}\right) =$$
$$= \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}, \quad n > 1$$

ALCUNE FORMULE NOTEVOLI

- Barcicentro di una regione $A \subset \mathbf{R}^n$ di misura non nulla: $\vec{b} = (b_1, \dots b_n) = \dfrac{1}{m(A)} \displaystyle\int_A \vec{x} dx_1 \dots dx_n$
- Baricentro di una curva γ o superficie Φ in forma parametrica

$$(b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{\mathcal{L}(\gamma)} \int_\gamma (x, y, z) d\mathcal{L},\ (b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{\text{Area}(\Phi)} \int_\Phi (x, y, z) dVol_2$$

- Integrali nel piano con coordinate polari $(x, y) = \Phi(r, \varphi) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$

$$\int\int f(x, y) dxdy = \int\int f(r \cos\varphi, r \sin\varphi) r dr d\varphi$$

- Integrali nello spazio con coordinate cilindriche $(x, y, z) = \Phi(r, z, \varphi) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi, z)$

$$\int\int\int f(x, y, z) dxdydz = \int\int\int f(r \cos\varphi, r \sin\varphi) r dr d\varphi dz$$

- Integrali nello spazio con coordinate sferiche $(x, y, z) = \Phi(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \cos\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\theta)$

$$\int\int\int f(x, y, z) dxdydz = \int\int\int f(\rho \cos\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho^2 \cos\theta d\rho d\varphi d\theta$$

- Volume del solido generato dalla rotazione di una porzione piana connessa attorno ad una asse complanare che non la interseca

$=$

(area porzione piana)(angolo rotazione)(distanza media dall'asse di rotazione)

$=$

(area porzione piana)(angolo rotazione)(coordinata del baricentro della regione piana ortogonale all'asse)

$=$

(area porzione piana)(lunghezzza arco percorso del baricentro)

DIM caso in cui l' asse di rotazione è l'asse $x = 0$, $y = 0$, e D è nel piano $y = 0$. Sia D_α il solido ottenuto ruotando D di α. $vol(D_\alpha) = \int_{D_\alpha} dxdydz =$ coordinate cilindriche $\int_{D \times [0;\alpha]} r dr d\varphi dz =$ iterazione $\int_0^\alpha \left(\int_D r dr dz\right) d\varphi = m(D) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{m(D)} \int_D r dr dz$

- Area superficie generata dalla rotazione di una curva piana attorno ad una asse complanare che non la interseca $=$ (lunghezza curva)(lunghezza arco descritto dal baricentro della curva)

DIM caso in cui l' asse di rotazione è l'asse $x = 0$, $y = 0$, e la curva C è l'immagine iniettiva di $t \mapsto (f(t), 0, g(t)), a \leq t \leq b$ con $f(t) \geq 0$. Sia C_α la superficie ottenuta ruotando di α. Essa è immagine di $(t, \varphi) \mapsto (f(t) \cos\varphi, f(t) \sin\varphi, g(t)), (t, \varphi) \in [a; b] \times [0; \alpha]$, quindi dalla definizione

$$area(C_\alpha) = \int_{[a;b]\times[0;\alpha]} \sqrt{det \begin{pmatrix} f'(t) \cos\theta & f'(t) \sin\theta & g'(t) \\ -f(t) \sin\theta & f(t) \cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t) \cos\theta & -f(t) \sin\theta \\ f'(t) \sin\theta & f(t) \cos\theta \\ g'(t) & 0 \end{pmatrix}} dt d\varphi$$

$$= \int_{[a;b]\times[0;\alpha]} \sqrt{det \begin{pmatrix} (f'(t))^2 + (g'(t))^2 & 0 \\ 0 & (f(t))^2 \end{pmatrix}} dt d\varphi = \int_{[a;b]\times[0;\alpha]} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} f(t) dt d\varphi$$

$$= \text{iterazione} \int_0^\alpha \left(\int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} f(t) dt\right) d\varphi = \mathcal{L}(C) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\mathcal{L}(C)} \int_C x d\mathcal{L}$$

CASI PARTICOLARI

volume di rotazione attorno all'asse delle x del sottografico di $y = f(x) \geq 0 = \frac{\alpha}{2} \cdot \int f^2(x) dx$

volume di rotazione attorno all'asse delle y del sottografico di $y = f(x) \geq 0, x \in [a; b], a \geq 0$ $= \alpha \int_a^b x f(x) dx$

area di rotazione attorno all'asse delle x del grafico di $y = f(x) \geq 0 = \alpha \int f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

area di rotazione attorno all'asse delle y del grafico di $y = f(x) \geq 0, x \in [a; b], a \geq 0 =$ $\alpha \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$