Matematica, Anno Accademico 2006-2007, Scienze Geologiche

VIII foglio di esercizi: M. Novaga, V.M. Tortorelli

19 gennaio 2007

Materiale relativo al corso si reperisce in rete: http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html

---

Proposizione Se P è un polinomio con coefficienti complessi $P(z_0) = 0$ se e solo se $P(z) = Q(z)(z - z_0)$. Quindi il polinomio ha al più un numero di radici pari al suo grado.
Teorema fondamentale dell'algebra Ogni polinomio ha almeno una radice complessa.
Corollario Un polinomio ha un numero di radici, con molteplicità, pari al suo grado.
Se $z = a + ib$ con $\overline{z}$ si indica $a - ib$, e si dirà *coniugato* di z.
Osservazione Un polinomio con coefficienti reali ha radici complesse e coniugate.

ESERCIZIO n. 1 Si scrivano in forma cartesiana ($x + iy$ con x e y in $\mathbf{R}$) i seguenti numeri complessi: $(\sqrt{2} + ie)(i - 23)$, $(-4 + 4i)^6$, $\frac{1}{i}$, $\frac{1+i}{\left((2+i)^2\right)}$, $1 + i + i^2 + i^4 + i^6$, $\frac{1}{x+iy}$, $\sqrt{2 + 2i}$.

ESERCIZIO n. 2 Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbf{C}$ delle seguenti equazioni: $z^2+1 = 0$, $z^6+1 = 0$, $z^4 + 1 = 0$, $z^2 + 2z + 1 = 0$, $z^2 + 4z + 5 = 0$, $z^2 + 2iz - 1 - i = 0$, $z^2 + z + 1 = 0$.

ESERCIZIO n. 3 Si risolvano le seguenti equazioni: $i\bar{z}^3 = |z|$, $z^2 + |z| + 1 = 0$, $2z^4 + 3z^2 = 0$, $z|z| - 2\mathcal{R}ez = 0, \mathcal{I}mz^2 = 1$

ESERCIZIO n. 4 Si determino le regioni del piano definite dalle seguenti formule: $|z - i| = 2$, $|z - 1| = |z - i|$, $|z - 1| < |z - i|$, $|z - 1| + |z - i| = 2$, $|z - 1| + |z - i| = \sqrt{2}$, $\mathcal{R}ez = 2\mathcal{I}mz$.

ESERCIZIO n. 5 - Forma trigonometrica di: 4, $7i$, $3 + 3i$, $\sqrt{3} - i$, $1 - i$.

- Si scrivano in forma trigonometrica i numeri complessi z per cui si rispettivamente : $z = \mathcal{R}ez > 0$, $|\mathcal{R}ez| < \mathcal{I}mz$, $|z| \leq 1$.

ESERCIZIO n. 6 Trovare le radici seste di -1, quadrate di $1 + i\sqrt{3}$ e cubiche di 1.

Notazione Se $z = x + iy \in \mathbf{C}$ si inidca con e^z il numero $e^x(\cos y + i \sin y)$.

ESERCIZIO n. 7 Per ogni numero complesso $w \neq 0$ vi è un numero complesso z per cui $w = e^z$. Quante sono le soluzioni di $w = e^z$?

ESERCIZIO n. 8 Il prodotto di due numeri complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti. In altri termini, per quanto enunciato nel precedente esercizio $e^z e^w = e^{z+w}$.

ESERCIZIO n. 9 - Si verifichi che le radici n-sime di 1 sono $e_h = e^{i2\pi\frac{h}{n}} = (e_1)^h$, $0 \leq h < n$.

- Fissati n ed m l'insieme dei $e^{i2\pi m\frac{h}{n}}$, $h \in \mathbf{Z}$ è contenuto in quello delle radici n-sime di 1. Coincide con esso se e solo se m ed n non hanno divisori comuni. In altri termini $\left(e^{i2\pi m\frac{1}{n}}\right)^h, 0 \leq h < n$ sono le radici n-sime di 1 se e solo se m ed n sono primi fra loro.

ESERCIZIO n. 10 L'area del triangolo di veritci u, v, $w \in \mathbf{C}$ è data da $\frac{1}{2}\left|(w - v)\overline{(u - v)}\right|$.

ESERCIZIO n. 11 - Il prodotto scalare tra (x, y) e (u, v) è dato da $\mathcal{R}e\left((x + iy)\overline{(u + iv)}\right)$.
- Che operazione tra numeri complessi da il determinante della matrice di righe (x, y), (u, v)?