

DEFINIZIONE: Una funzione $x \mapsto F(x)$ definita su un intervallo I si dice *primitiva sull'intervallo* di una funzione $x \mapsto f(x)$ se: F è derivabile su I e $F' = f$ su I . La *famiglia delle primitive* di f su un intervallo si indica con $f^x f$. Due primitive su un intervallo differiscono per una costante.

TEOREMA [FONDAMENTALE DEL CALCOLO: area calcolata con le primitive]

Se f è continua su $[a; b]$ allora:

i- La funzione integrale $\int_a^x f(y)dy$ è una primitiva

ii- per ogni altra F primitiva di f su $[a; b]$ si ha: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

ESERCIZIO n. 1 a- [PRIMITIVE DI BASE] Si determinino le primitive nulle in $x = 0$ delle seguenti funzioni: e^x , x^2 , \sqrt{x} , x^a ($a \neq -1$), $\frac{1}{x+1}$, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{\cos^2 x}$, $1 + \tan^2 x$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ [R. $\log(x + \sqrt{1+x^2})$ l'inversa arcsenoiperbolico: $\operatorname{arsinh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$].

b- [SOSTITUZIONE] Si risponda allo stesso quesito nei casi seguenti tenendo presente la *regola della catena* $F(x) = G(t(x))$: $\frac{dF}{dx}(x) = \frac{dG}{dt}(t(x)) \frac{dt}{dx}(x)$, $t = t(x)$:

$2xe^{x^2}$, $10x(1+x^2)^4$, $\sqrt{5x+9}$, $\frac{1}{\sqrt{5x+9}}$, $\frac{1}{5x+e}$, $\frac{4x}{144+x^2}$, $\frac{\log(1+x)}{1+x}$, $\tan x$, $\frac{g'(x)}{g(x)}$,

$e^{2x} \cos e^{2x}$, $\cos x \sin^{501} x$,

$\frac{1}{144+x^2}$, $\frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}}$, $\frac{\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}$, $\sin^2 x [1 - 2 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x]$, $\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$.

c- [RAZIONALI SEMPLICI] $\frac{x}{(x^2+1)^n}$, $\frac{1}{(x+1)^n}$, $\frac{1}{x^2-1}$, $\frac{x}{1+x}$, $\frac{x+4}{(x+1)^2-6(x+1)}$, $\frac{1}{x^2+1}$, $\frac{1}{x^4+1}$, $\frac{1}{(x^2+1)^2}$.

d- [PARTI] Si risponda allo stesso quesito nei casi seguenti tenendo presente la *regola della derivata di un prodotto* $F' = G'H = (GH)' - GH'$

$x \sin x$, xe^x , $x^2 e^x$, $x^3 \cos x$, $x \sin^2 x$, $\operatorname{arsin} x$, $x^a \log x$, $\log^2 x$, $e^x(1+x) \log x$, $\sin ax \cos bx$

e- [SOSTITUZIONE INVERSA] $G(t) = F(x(t))$: $\frac{dF}{dx}(x(t)) = \frac{dG}{dt}(t) \left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^{-1}$, $x = x(t)$, per avere la risposta bisogna quindi trovare l'inversa di $t \mapsto x(t)$:

$\frac{\sqrt{2+x}}{1+x}$ [$x = t^2 - 2$], $\frac{1}{1+\tan^2 x}$ [$x = \operatorname{artan} t$], $\sqrt{1-x^2}$ [$x = \cos t$], $\cos(\log(x+1))$ [$x+1 = e^t$]

ESERCIZIO n. 2 Si provino le formule: $\int \log^n x = x \log^n x - n \int \log^{n-1} x + c$, $\int x^n e^x = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x$, $\int x \sin x = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x$, $\int x^a \log^n x = \frac{x^{a+1} \log^n x}{a+1} - \frac{n}{a+1} \int x^a \log^{n-1} x$

RICETTE Se $R(x, y)$, $R(x, y, z)$ sono rapporto di due polinomi le primitive di una funzione del tipo $R(\cos x, \sin x)$ si trovano con la sostituzione $t = \tan \frac{x}{2}$, di una del tipo $R(x, \sqrt{1-x^2})$ con $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ o $x = \sin t$, di una $R(x, \sqrt{1+x^2})$ con $t = x + \sqrt{1+x^2}$, di $R(x, \sqrt{x^2-1})$ con $t = \sqrt{\frac{x-1}{1+x}}$, di $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n}{m}}\right)$ con $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$, di $R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})$ con $t = \sqrt{ax+b}$.

Inoltre di molte funzioni non si possono calcolare le primitive. Esempi: $\frac{1}{\sqrt{a_0+\dots+a_n x^n}}$, $\frac{e^x}{x}$, $e^{\pm x^2}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$.

ESERCIZIO n. 3 Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\log x}}, \quad \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx, \quad \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{3\sqrt{1+x^2}}, \quad \int_0^1 \operatorname{arsin}^4 x dx, \quad \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$$

ESERCIZIO n. 4 Stabilire se i seguenti integrali impropri sono convergenti:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{(2+\cos x) \log x}{x^{\alpha}} dx \quad (\text{al variare del parametro } \alpha \in \mathbf{R}),$$
$$\int_1^{\infty} \frac{e^x \arctan x}{((2x)^x - 1)^2} dx, \quad \int_0^{\infty} \left(1 - \sqrt{\frac{t}{t+1}}\right) dt, \quad \int_1^{\infty} \frac{e^{-x^2} x^x - e^{x-2}}{1-x^x} dx,$$
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - x^2}} dx, \quad \int_0^{\pi} \frac{1}{\log(\cos x^2)^{\frac{1}{3}}} dx, \quad \int_1^{\infty} \left((x^8 - 1)^{-\frac{1}{9}} - x^{-\frac{8}{9}}\right) dx.$$

ESERCIZIO n. 5

Si studi l'integrabilità, e quindi la convergenza degli integrali, al variare dei parametri reali α e β delle funzioni: $\frac{1}{x^{\alpha} |\log|x||^{\beta}}$, su ognuno dei domini $]0; \frac{1}{2}[$, $[\frac{1}{2}; 1[$, $]1; \frac{3}{2}[$, $[\frac{3}{2}; +\infty[$.

ESERCIZIO n. 6 Si studi l'integrabilità, e quindi la convergenza degli integrali, delle seguenti funzioni sui rispettivi domini:

$$\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x \log(1+\sqrt{x})}, \quad x \in]0; 1[; \quad \frac{1 - (\cos x)^{\frac{1}{4}} + \log(1+x^{\frac{1}{2}})}{(\sin x + 1 - e^{\frac{x}{2}})^{\frac{1}{2}}}, \quad x \in]0; 1[;$$
$$\frac{\arctan x}{((2x)^x - 1)^2}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{\sin \frac{1}{x}} - \frac{1}{\log(x+1) - \log x}, \quad x > 1;$$
$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}, \quad x \in]0; 1[; \quad \frac{1}{1 - |\cos(x^{\alpha})|}, \quad x \in]0; \pi[\quad (\text{al variare del parametro } \alpha \in \mathbf{R}).$$

ESERCIZIO n. 7

a) Si provi mediante integrazione per parti e confronto che $\frac{\sin x}{x}$ ha integrale in senso generalizzato su $]0; +\infty[$ finito.

b) Si provi che se $x \mapsto g(x)$ è una funzione definita su $]0; +\infty[$, decrescente ed infinitesima per $x \rightarrow +\infty$, e quindi non negativa, allora la funzione $g(x) \sin x$ ha integrale in senso generalizzato su $]0; +\infty[$ finito.

c) Che dire sull'integrale generalizzato di $|g(x) \sin x|$?

ESERCIZIO n.8 Si studi l'integrabilità in senso generalizzato, ed eventualmente la convergenza degli integrali, su $]0; +\infty[$ delle funzioni $\sin(x^2)$, $\left(\sin \pi \left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^2$ e $\sin \pi \left(x + \frac{1}{x}\right)$.

ESERCIZIO n. 9 Studiare il dominio e il comportamento asintotico agli estremi dello stesso delle seguenti funzioni $x \mapsto f(x)$:

$$\int_{2x-3}^{x+5} \frac{te^{t-1}}{2t-7} dt; \quad \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{1-t^2}} dt; \quad \int_0^{\tan x} \frac{\cos t}{1+t^2} dt.$$

ESERCIZIO n. 10 Posto $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, si studi il limite del rapporto $\frac{F(x)}{f(x)}$, $x \rightarrow +\infty$, nei seguenti casi:

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \quad f(x) = e^x, \quad f(x) = xe^{x^2}, \quad f(x) = \log x.$$

ESERCIZIO n. 11 Si consideri $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$, $\alpha > 0$. Si provi che è ben definito e quindi che $\Gamma(n) = (n-1)!$ per $n \in \mathbf{N}$.

ESERCIZIO n. 12 Dati gli integrali $\frac{1}{3}T(\kappa) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2} \cdot \sqrt{1-\kappa^2 t^2}} dt$ $\kappa \in [0; 1[$.

a) Si calcoli $T(0)$ e si provi che per ogni $\kappa \in [0; 1[$ tali integrali sono finiti.

b) Si studi al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il comportamento di $(T(\kappa) - T(0)) \cdot \kappa^{-\alpha}$ per $\kappa \rightarrow 0$.

ESERCIZIO 13 Si calcolino l'area superficiale laterale ed il volume del solido delimitato dalle seguenti figure di rotazione attorno all'asse specificato: grafico di $z = \sqrt{1+x^2}$ $0 \leq x \leq 1$, $x = y = 0$; grafico di $z = \sqrt{1+x^2}$ $0 \leq x \leq 1$, $z = y = 0$; $(x-1)^2 + y^2 = 4$ $x = y = 0$; $(x-1)^2 + y^2 = 4$ $z = y = 0$;

ESERCIZIO 14 -Si calcoli l'area del dominio "cartesiano" identificato dalle seguenti condizioni sulle coordinate polari $1 \leq \rho\theta \leq 2$, $\pi/4 \leq \theta$.

- Si calcoli il volume della regione specificata dalle seguenti condizioni $x^2 + y^2 \leq z^2 + 1 \leq 2$.

ESERCIZIO 15 Calcolare gli integrali delle seguenti funzioni sui domini specificati: $\sqrt{x^2 + y^2}$ cerchio di centro l'origine e raggio unitario; $(\sin y)x \sin y^2 x^2$ triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$; $x + y + z$ cono di centro $(0, 0, 1)$ e base $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; $z^3 + xyz$, $z^2 \leq x^2 + y^2 \leq z$; $\frac{z}{x^2 + y^2}$, $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 1$; ye^x , $0 \leq y \leq e^{-x}$ $0 \leq x$; $x + 2y$ regione compresa tra il segmento $y = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$ e l'immagine della curva $(t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

ESERCIZIO 16 Si dica se le seguenti funzioni hanno integrale finito nei domini rispettivamente specificati al variare degli eventuali parametri: $\frac{1}{x^4 + y^4}$, $y^2 \leq x^4 \leq 5$; $(x^2 + y^2 + z^2)^2$, $x^2 + y^2 \leq z^4$; $\frac{x^2 y^\alpha}{1 - \cos x + \frac{y^2}{2}}$, quadrato di vertici $(0, 0)$ $(1, 0)$ $(1, 1)$ $(0, 1)$, $\alpha \in \mathbf{R}$; $\frac{1}{((x-1)^2 + y^2)^{2\alpha}}$ cerchio di raggio 5 e centro $(0, 0)$, $\alpha > 0$; $\frac{1}{(|x|^\alpha + |y|^\alpha + |z|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$ $\max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 1$, $\alpha > 0$

ESERCIZIO 17 Considerando la funzione $f(x, y, z) = x^2 y^2 + z^2 y^2 + x^2 z^2$, omogenea di grado 4 per cui $(x, y, z) \cdot \nabla f(x, y, z) = 4f(x, y, z)$, si calcoli il suo integrale sulla superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

ESERCIZIO 18 - Si calcoli l'area della superficie ottenuta tracciando i segmenti congiungenti l'origine $(0, 0, 0)$ con i punti della curva $(t \cos t, t \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

- Si calcoli l'area della superficie di \mathbf{R}^4 definita da $x^2 + y^2 = 1$, $z^2 + w^2 = 1$.

- Si scriva l'elemento d'area della superficie definita implicitamente da $e^{x+y+z} = 1 + x$.

- Si calcoli $\int_{0 < z = xy, x^2 + y^2 < R^2} \frac{z}{x^2 + y^2} dVol_2$.

- Si integri yz^2 sulla regione bidimensionale definita da $x^2 + z^2 = a^2$, $0 \leq y \leq b$.

ESERCIZIO 19 - La funzione $\frac{1}{x^4 + y^4 + z}$ ha integrale finito su $x^3 + y^3 + 1 = z$, $x \geq 0$, $y \geq 0$?

- Si dica se l'integrale della funzione $\log(x^2 + y^2 + z^2)$ è finito su $z = \log(x^2 + y^2) \leq 0$.

- Si dica se l'area della superficie ottenuta ruotando attorno all'asse della x il luogo di zeri $e^z - e^{-x^2} = 1$ è finita o meno.

- Dire se la funzione $(x, y, z, w) \mapsto x^2 y^2 z w$ ha integrale finito sulla superficie definita implicitamente con le condizioni $(x^2 + y^2)(z^2 + w^2) = 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $z, w \geq 0$.

- Si calcoli l'integrale in senso generalizzato della funzione $e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$ su $x^2 - y^2 + z^2 = 0$.
