

ESERCIZIO n. 1 Si dica se $(0, 0)$ è di massimo, di minimo, o di sella per ciascuna delle seguenti funzioni: $x^4 + y^4$, $x^4 - y^4$, $1 - x^4 - x^2y^2 - y^4$.

ESERCIZIO n. 2 Determinare i punti critici delle seguenti funzioni ed eventualmente determinarne la natura: $x^3 + (x - y)^2$, $x^4 + (x - y)^2$, $xy + y^2 - 3x$, $\sin(x + y)$, $x^2 - \sin y$, $x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$, $x^2(1 - y)^2(z + \frac{1}{2})^2$.

ESERCIZIO n. 3 Determinare minimo e massimo delle seguenti funzioni nei rispettivi insiemi:
 xy su $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$, $x^2 + y^2 - (x + y)$ su $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$
 $\frac{x^2y}{x^2+4y^2} + x$ per $xy > 0$ $xy + x$ per $xy \leq 0$ su $\{0 \leq y \leq 1, y^2 - 1 \leq x \leq 1\}$

ESERCIZIO n. 4 Sia $f(x, y) = 2x^4 - x^2e^y + e^{4y}$. Si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di tale funzione e se ne calcoli il limite per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$. Si osservi che vi sono solo due punti di minimo assoluto e nessun altro punto critico. Si traccino approssimativamente le linee di livello $f = c$, al variare di c in \mathbf{R} , mettendo in risalto quali sono connesse, quali sono limitate.

ESERCIZIO n. 5 Sia data un insieme di coppie $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$. Determinare a e b in modo tale che la funzione:

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2 \text{ sia minima. Il minimo è assoluto o relativo?}$$

ESERCIZIO n. 6 Si ricorda che $C \subseteq \mathbf{R}^n$ è detto convesso se contiene interamente i segmenti delimitati dai suoi punti: se $x \in C$, $y \in C$ e $\lambda \in [0; 1]$ allora $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. Una funzione $f : C \rightarrow \mathbf{R}$ si dice convessa se C è convesso e se $\lambda \in [0; 1]$ allora $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

- Sia Ω un aperto convesso di \mathbf{R}^n , e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ differenziabile. Dimostrare che f è convessa se e solo se, per ogni $x, y \in \Omega$: $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$ dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rappresenta il prodotto scalare in \mathbf{R}^n .
- Nelle stesse ipotesi si deduca che f è convessa se e solo se il suo grafico sta sopra ogni piano tangente ad esso.
- Se poi f è C^2 si provi che f è convessa se e solo se $Hf(x)$ è definita non negativa in ogni punto.

ESERCIZIO n. 7

- Sia $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione strettamente convessa, ove Ω è un aperto convesso. Si dimostri che f ha al più un estremo interno a Ω ?
- Utilizzando che una funzione convessa a valori reali, definita su un chiuso C limitato convesso è continua si provi che se $C = \bar{\Omega}$, con Ω aperto convesso, allora il massimo di f è assunto su $\partial\Omega$.

ESERCIZIO n. 8 Trovare i punti di massimo o di minimo relativo e calcolare i valori di massimo relativo e minimo relativo, delle seguenti funzioni sui domini rispettivi:

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 \text{ per } (x + y)^2 + (x - y)^2 = 1 ;$$

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 2x^3y}{x^4 + y^4}, \quad y - x^2 = 0 ; \quad f(x, y) = \sin((x - 2)^2 + y^2), \quad (1 - x)^3 + y^2 = 0 ;$$

$$f(x, y) = x^2 + 6xy + 3y^2, \quad x^2 + y^2 - 2xy = \frac{1}{(x+y-2)^2} ;$$

$$f(x, y, z) = e^{-(x^2 - y + z^2)}, \quad \frac{x^2}{4} + y^2 + 3z^2 \leq 1, \quad (\text{Ex.C.P.S.29.14, 278}) ;$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \begin{cases} (z + 1)^2 - y^2 - (x + 3)^2 = 0 \\ z^2 + y^2 - (x + 1)^2 = 0 \\ z > -3 \end{cases} ;$$

$$f(x, y, z) = (x + 1)^2 + (y - \varepsilon)^2 + z, \quad \begin{cases} (1 - x)z = (1 + x)y \\ z^2 + y^2 - (x + 1)^2 = 0 \\ z > -3 \end{cases} ;$$

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2, \quad \text{tetraedro di vertici } (-1, -1, -1), (1, -1, -1), (0, 1, -1), (0, 0, 1) ;$$

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2, \quad \max\{|x + 2|, |y + 3|, |z + 4|\} = 1 ;$$

$$f(x, y, z, w) = x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} + \frac{w^2}{4}, \quad \begin{cases} (x + y + z + w)^2 + (x - y + z - w)^2 = 1 \\ (x - y - z + w)^2 + (x - y - z - w)^2 = 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO n. 9 Provare che l'insieme $D = \left\{ (x, y, z) : \frac{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}} - 3}{4} + z^2 = 1 \right\}$ è chiuso e limitato. Determinare poi la massima e la minima distanza dei punti di D dall'origine.

* ESERCIZIO n. 10 È vero che il minimo valore di $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2$ su $(x - R)^2 + (y - R)^2 = 2R^2$ è sempre 0? Giustificare la risposta.

ESERCIZIO n. 11

a) Trovare il massimo volume di un parallelepipedo rettangolo inscritto nell'ellissoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

b) Trovare l'ellissoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ di volume massimo per cui $a + b + c = M$, $a, b, c > 0$.

c) Trovare la minima distanza tra gli insiemi $\{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{yz = xz\}$ e $\{z - y = 0\} \cap \{x + y + z = 1\}$.

ESERCIZIO n.12 Sia \mathbf{O} l'insieme delle matrici ortogonali $n \times n$, e sia $f : \mathbf{O} \mapsto \mathbf{R}$ definita da $f(A) = \text{tr } A$. Si dimostri che esistono unici e si calcolino i punti di massimo e minimo di f .

ESERCIZIO n.13 Dato un vettore $x = (x_1, \dots, x_n)$, tale che $x_i > 0$ per ogni i e $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, si definisce $H(x) = -\sum_{i=1}^n x_i \log x_i$. Determinare il vettore che massimizza H .

ESERCIZIO n.14 In un mercato duopolistico ci sono n aziende che producono lo stesso bene, ognuna in quantità y_i . Il prezzo p del bene dipende dalla quantità totale prodotta $\sum_{i=1}^n y_i$. Ogni azienda decide di produrre la quantità y_i che massimizza il proprio profitto:

$$f_i(y_i) = p \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) y_i - cy$$

dove c è il costo unitario di produzione del bene.

Determinare in quali condizioni il mercato è in equilibrio (ogni azienda, cioè, non intende modificare la propria produzione y_i).

Dimostrare che per $n \rightarrow \infty$ il prezzo di equilibrio p converge a c .

ESERCIZIO n. 15

a) - Se $u \in C^2(\mathbf{R}^n)$ e $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} > 0$ allora u non ha punti di massimo locale.

- Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, Ω aperto limitato, se $\Delta u \geq 0$ allora $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

(Si consideri x_0 di massimo su $\bar{\Omega}$ di u e $v(x) = u(x) + \varepsilon|x - x_0|^2$. Si applichi il precedente punto a v .)

- Si deduca che se $\Delta u \geq 0$ allora u non ha punti di massimo locale stretto.

b) - Si provi che se Ω è un aperto limitato, $f \in C(\mathbf{R}^n)$, $g \in C(\mathbf{R}^n)$ allora vi è *al più una* funzione u definita su $\bar{\Omega}$ che risolve:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega \\ u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \end{cases}$$

- Si provi che per questa eventuale soluzione si ha:

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + \frac{(\text{diam}\Omega)^2}{2n} \max_{\bar{\Omega}} |f|.$$

NOTA: Si può provare:

- se Ω è un connesso aperto, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $\Delta u \geq 0$, allora se u assume massimo in $\bar{\Omega}$ allora lo assume **solo** sul bordo $\partial\Omega$ oppure u è costante.

- se Ω è un connesso aperto, $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$, allora u non assume né massimi né minimi locali interni in Ω a meno che non sia costante.

ESERCIZIO n. 16 Utilizzando quanto dimostrato nel precedente esercizio si trovino tutte le soluzioni delle equazioni:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^2 & x^2 + y^2 = 1 \\ u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \Omega = \{x^2 + y^2 < 1\} \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \max\{|x|, |y|\} < \pi \\ u(x, y) = \sin x \cos y & \max\{|x|, |y|\} = \pi \\ u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \Omega = \{\max\{|x|, |y|\} < \pi\} \end{cases}$$

ESERCIZIO n.17 Siano $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo, limitato o meno, $f : (x, y) \in I \times \mathbf{R} \mapsto f(x, y)$ una funzione per cui dato $y \in \mathbf{R} \quad \exists \min_{x \in I} f(x, y) := g(y)$ e si ponga $C(y) =: \{x \in I : f(x, y) = g(y)\}$.

a: Per $I = [0; 1]$ si mostri un esempio in cui g non risulta derivabile in qualche punto, pur essendo f differenziabile infinite volte.

[Si consideri il sopragrafico di g in termini di quello di f]

b: - Se $y \mapsto f(x, y)$ è continua si provi che: $o(1) \geq g(y+h) - g(y)$, per $h \rightarrow 0$

- se poi esiste $\frac{\partial f}{\partial y}$ si provi: $h \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + o(h) \geq g(y+h) - g(y)$, per $h \rightarrow 0$ e $x \in C(y)$

c: Se f è continua su $I \times \mathbf{R}$, $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \in I \times \mathbf{R}$ e $x_n \in C(y_n)$ si provi che $x \in C(y)$.

d: Si assuma che $I = [a; b]$ sia limitato e chiuso.

- Si provi che se f è continua su $I \times \mathbf{R}$ anche g lo è su \mathbf{R} ;

[Si usi giustificatamente l'uniforme continuità di f sui sottoinsiemi limitati di $I \times \mathbf{R}$]

- (*) se poi vi è $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua allora g ha derivata "in avanti" eguale al minimo di $\frac{\partial f}{\partial y}$ su $C(y)$:

$$\exists (\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(y+h) - g(y)}{h} :=) \frac{d^+}{dy} \min_x f(x, y) = \min_{x \in C(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

[Ci si riduca ad usare il teorema del valor medio, uniforme continuità, sottosuccessioni e il risultato del terzo punto]

e: Si mostri, anche con una semplice esemplificazione grafica, che vi sono f differenziabili infinite volte su $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ per cui g non è continua né a destra né a sinistra.