Matematica, Anno Accademico 2006-2007, Scienze Geologiche

V foglio di esercizi: M.Novaga, V.M. Tortorelli

dal 17 novembre al 24 novembre 2006

http://WWW.dm.unipi.it/didactics/home.html -> ALTRI CORSI DI LAUREA -> Corso di laurea *****

ESERCIZIO n. 1 - Si provi che $(x,y,z) \mapsto \left(\frac{2rx}{r-z}, \frac{2ry}{r-z}\right)$ ristretta alla sfera di centro l'origine e raggio r è la proiezione stereografica dal "polo nord" sul tangente per il "polo sud".
- Se ne scriva l'inversa $(u,v) \mapsto (a(u,v).b(u,v).c(u.v))$
* - Si provi in modo sintetico che conserva gli angoli.

ESERCIZIO n. 2 Sia $f(x) = x + \log x$. Si provi che è bigettiva da $[1; +\infty[$ in se.
- Detta g l'inversa di f se ne disegni approssimativamente il grafico si provi che $\frac{\log g(a)}{g(a)} \to 0$ quando $a \to +\infty$.
* - si determini esplicitamente una funzione h per cui $g(a) - h(a) \to 0$ quando $a \to +\infty$.

ESERCIZIO n. 3 Si disegnino in maniera approssimativa i sottoinsiemi dal piano definiti da $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ f(x,y) = f(a,b)\ \}$ al variare di f e di (a,b), nei casi seguenti:

$x^3 + y^3 - 3axy$, $\ a > 0$, $(0,0)$; $\quad \frac{2xy}{x^2+y^2}$, $(\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in \mathbf{R}$.

ESERCIZIO n. 4 Si disegnino in modo approssimativo i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$:

$$\{(x,y,z): \ x^2 + y^2 + z^2 - 6\sqrt{x^2+y^2} + 5 = 0\};$$
$$\{(x,y,z): \ z > -3,\ z^2 + y^2 - (x+1)^2 = 0,\ (z+1)^2 - y^2 - (x+3)^2 = 0\};$$
$$\{(x,y,z) : y\tan z = x\};\ \{(x,y,z) : e^z \cos y = \cos x\};\ \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} = \cosh z\}.$$

ESERCIZIO n. 5 Si scriva la matrice Jacobiana delle seguenti funzioni $x + 2y + 3z$, $(x + 2y + 3z, -x)$, $(x + 2y + 3z, x^2 - y^3 + z^4)$, $(e^{x+y+z+w}, \frac{\sin(x+\log(1+y^2+w^6)-z)}{1+x^2}, xyzw)$.

ESERCIZIO n. 6 - Si calcolino seno e coseno dell'angolo di incidenza in $(1,1)$ tra le due curve (x^3, x^7), (x^5, x^9).
- Si trovi il piano tangente alla sfera di centro $(1,1,1)$ e raggio 1 in $(1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.
- Si trovi la retta ortogonale alla regione $\{(x,y,z): \ \log(x^2 + y^2 + e) = e^z\}$ in $(0,0,1)$.
- Si trovi il tangente nel punto $(1,1,-1)$ dell'insieme di punti definito da $x^7 + 2y^7 + z^7 - 2 = 0$ e $x^5 + 2y^5 + z^3 - 2 = 0$
- Si trovi il tangente nel punto $(1,1,-1)$ dell'insieme di punti definito da $x^7 + 2y^7 + z^7 - 2 = 0$ e $x^5 + 2y^5 + z^5 - 2 = 0$
- Si trovino le tangenti nel punto $(0,0,0)$ dell'insieme definito da $(x^2+y^2+z^2)^2 = 2(x^2-y^2-z^2)$ e $x - y^2 - z^2 = 0$.
- Si trovi la normale nel punto $(1,1,2)$ alla superifice immagine di $(u,v) \mapsto (v\cos u, v\sin u, v^2)$, $\ v > 0$
- Si calcoli l'angolo di incidenza che formano le seguenti coppie di regioni dello spazio incontrandosi nei punti rispettivamente indicati:

$\{(x,y,z): \ 2x^4 + 3y^3 - 4z^2 = -4\}$, $\{(x,y,z): \ 1 + x^2 + y^2 = z^2\}$, $(0,0,1)$;
$\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = e^z\}$, $\{(x,y,z) : x^2 + z^2 = e^y\}$, $(1,0,0)$;
$\{(x,y,z): \ xy = z\ \}$, $\{(x,y,z): \ \cos(2\pi xy) = z\}$, $(1,1,1)$.

ESERCIZIO n. 7 Si mostri per curva nello spazio data dal cammino $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$, $\ 0 \leq t \leq 2\pi$ la retta tangente non è mai parallela al segmento tra i due estremi

* - Si mostri che in ogni curva piana che ammette tangente continua ogni corda ha una direzione tangente parallela.

ESERCIZIO n. 8 - Sia $f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia $F : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definita da: $F(\rho, \varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. Verificare che: $(F_\rho(\rho,\varphi))^2 + \frac{1}{\rho^2}(F_\varphi(\rho,\varphi))^2 = (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2$ dove $x = \rho\cos\varphi$ e $y = \rho\sin\varphi$.
- Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia $F : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definita da: $F(R, \varphi, \theta) = f(R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)$. Si calcolino le derivate di F in funzione di quelle di f.

ESERCIZIO n. 9 Sia $g = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Dato il cambio di coordinate $(u, v) = (x, \frac{x}{\sqrt{y}})$, esprimere $g(x, y)$ in funzione di u e v .

ESERCIZIO n. 10 Si studino la continuità, la derivabilità nelle diverse direzioni, e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

$$\sqrt{|xy|}; \quad \sqrt{|x|}\cos y; \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}; \quad f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases};$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^3}e^{-\frac{y^2}{x^4}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

ESERCIZIO n. 11 - Si provi che $(\varphi, z) \mapsto (R\cos\frac{\varphi}{R}, R\sin\frac{\varphi}{R}, z)$ conserva i prodotti scalari tra le velocità di cammini (e quindi l'angolo e il modulo).
- Utilizzando longitudine e latitudine si provi che la proiezione stereografica conserva gli angoli

---

ESERCIZIO n. 12 - Si provi che una trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^3$ conserva gli angoli tra vettori se e solo se i trasformati della base canonica sono ortogonali e di egual lunghezza.
-Si deduca che, se $t \mapsto s(t) \in]-1,1[$ è una funzione derivabile strettamente crescente, $(\varphi, t) \mapsto (\sqrt{1-s^2(t)}\cos\varphi, \sqrt{1-s^2(t)}\sin\varphi, s(t))$ è una parametrizzazione della sfera che conserva gli angoli tra curve se e solo se $s'(t) = 1 - s^2(t)$
- Osservando che $\frac{as'(t)}{1+as(t)} = (\log(1+as(t)))'$ e imponendo che $s(0) = 0$ si provi che $s(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$.
- Esprimere la coordinata t così determinata (di Mercatore) con la "latitudine" θ.

ESERCIZIO n. 13 Si esprimano le coordinate della proiezione stereografica (u, v) in funzione di quelle di Mercatore. Si deduca quindi che la proiezione stereografica mantiene gli angoli tra curve e viceversa.

ESERCIZIO n. 14 Sia $f \in C^1(A)$, con A aperto. Dimostrare che f é positivamente omogenea di grado α (i.e. $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $x \in A$) se e solo se $\alpha f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_{x_i}(x)$.

ESERCIZIO n. 15 Dato $C \subseteq \mathbf{R}^2$ si definisce la funzione distanza da C come segue:

$$d_C(x,y) = \inf_{(a,b)\in C} \sqrt{|x-a|^2 + |y-b|^2}$$

Si descrivano, nei seguenti casi, le regioni del piano ove d_C é differenziabile:

(a) $C=\{(0,0)\}$; (b) $C=\{(-1,0),(0,1)\}$; (c) $C=\{(-1,0)\}\cup\{(1,b):b\in\mathbf{R}\}$; (d) $C=\{(-1,0)\}\cup\{(a,b):(a+1)^2+b^2=1\}$.

ESERCIZIO n. 16 (a) La funzione $f(x,y)=\binom{x-yx}{2xy}$ da $\mathbf{R}^2$ in se è iniettiva? È surgettiva?
(b) Sia $f(x,y)=\binom{x^2+y^2}{2xy}=(u,v)$: si studi l'immagine di f, si studi al variare di (u,v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$.

ESERCIZIO n. 17 Si disegnino le curve $2y^2-x(x-1)^2=0$, $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$.

ESERCIZIO n. 18 a) Si calcoli la derivata $\frac{dy}{dx}$ nei seguenti casi: $x^3y-y^3x=a^2$, $\sin xy-e^{xy}-x^2y=0$, $x^y=y^x$.
b) Si calcolino le derivate specificate per le seguenti relazioni:
$\frac{x^2}{a^2}+y^2b^2+z^2c^2=1:\ \frac{\partial z}{\partial x}$; $z^3+3xyz=a^3:\ \frac{\partial z}{\partial x}$; $e^z-xy^2z=0:\ \frac{\partial z}{\partial y}$.

ESERCIZIO n. 19 Sia $f(x,y)=\binom{x^2-y^2}{2xy}=(u,v)$: si studi l'immagine di f, si studi al variare di (u,v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$. Si determini le regioni ove il differenziale è invertibile e quindi le regioni ove la funzione è invertibile.

ESERCIZIO n. 20 a) Sia $f(x,y)=\binom{x^2}{y}$, $g(x,y)=\binom{x^3+xy}{y}$: se ne studino le immagini. Si studino le immagini delle regioni ove i differenziali non sono invertibili e come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$, $g^{-1}\{(u,v)\}$.
b) Sia $f(x,y)=\binom{e^{x+y}-e^{x-y}-k^2x}{x+y}=(u,v)$, $k\in\mathbf{R}$: si studi l'immagine di f e al variare di (u,v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$. Si determini un intorno di $(x,y)=(0,0)$ in cui f é iniettiva, ed quindi si calcolino (relativamente a tale intorno) $\frac{\partial x}{\partial u}(0,0)$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}(0,0)$.
c) Sia $f:\mathbf{R}^5\to\mathbf{R}^2$ $f(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)=\binom{2e^{x_1}+x_2y_1-4y_2+3}{x_2\cos x_1-6x_1+2y_1-y_3}$: si verifichi che in un intorno di $(0,1,3,2,7)$ la regione determinata dalle equazioni $f=(0,0)$ é un grafico rispetto alle variabili (y_1,y_2,y_3) e si calcoli $\frac{\partial x_1}{\partial y_2}(3,2,7)$. É possibile esplicitare (x_1,x_2) in funzione di (y_1,y_2,y_3) in ogni punto di $\{f=(0,0)\}$?

ESERCIZIO n. 21 a) Sia $f(x,y)=\binom{x^2-y^2}{xy}=(u,v)$: si trovi un intorno di $P_0=(1,1)$ in cui f é iniettiva.
b) Si calcolino le derivate parziali seconde in $U_0=(0,1)=f(1,1)$ dell'inversa della funzione f ristretta a tale intorno.

ESERCIZIO n. 22 Sia $T:\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}^2$ una rotazione, cioè una applicazione lineare del tipo $x\mapsto Rx$, con $R=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

Detto $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, dimostrare che: $\Delta(u\circ R)=(\Delta u)\circ R$ per ogni $u\in C^2$.

ESERCIZIO n. 23 Si identifichi lo spazio M delle matrici $n\times n$ con $\mathbf{R}^{n^2}$, ordinando in modo lessicografico gli elementi delle matrici.
a) Sia $t\mapsto A(t)$ una funzione regolare da $]-1;1[$ in M tale che $A(0)=A$ e $A'(0)=I$, ove I è la matrice dell'identità. Si trovi lo sviluppo di Taylor del primo ordine di $A(t)$ in $t=0$.
b) Se $\Sigma=\{f(A)=1\}$ si provi che i vettori $X\in M$ tangenti ad $A\in\Sigma$ sono quelli per cui $\mathrm{tr}\ A^{-1}X=0$.
c) Si consideri la funzione $f:\mathbf{M}\mapsto\mathbf{R}$ definita da $f(A)=\det A$. Si dimostri se $f(A)\neq 0$: $\nabla f(A)=\det A\,({}^tA)^{-1}$ (${}^tA$ indica la trasposta di A).