MATEMATICA

Anno Accademico 2005-2006

Scienze Geologiche

M.Novaga, V.M. Tortorelli

II prova finale, 20 febbraio 2006

I PARTE: si dia la risposta alle seguenti domande senza giustificazione

---

1 - Si trovi la minima distanza dei punti dell'iperbole definita da $x^2 - y^2 = 1$ dal punto $(0, 1)$.

R.: Si tratta di trovare il punto di minimo della funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ con il vincolo $x^2 - y^2 = 1$. Conviene far ciò per f^2. Poichè il vincolo è il luogo di zeri di una funzione con gradiente nonnullo su di esso si può usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:
$$\begin{cases} x = \lambda x \\ y - 1 = -\lambda y x^2 - y^2 = 1 \end{cases}.$$
Quindi poichè per il vincolo x è nonnullo deve essere $\lambda = 1$, quindi il minimo cercato è 1 e la distanza minima 1.

2- Si trovi il coseno dell'angolo di incidenza della curva $(\cos t, \sin t, t)$ con la superficie $\pi x^2 + \pi y^2 - z = 0$

R.: Vi è un solo punto di incidenza: infatti sostituendo le coordinate del cammino nell'equazione si ottiene $t = \pi$, e il punto di incidenza è $(-1, 0, \pi)$.
Essendo il cammino iniettivo questo punto della curva viene percorso solo per $t = \pi$ e con velocità non nulla: $(-\sin\pi, \cos\pi, 1) = (0, -1, 1)$, che ha come direzione la tangente alla curva.
Il luogo di zeri è in effetti una superficie regolare poichè è un grafico: il suo gradiente nel punto è ad essa ortogonale e vale $(2\pi(-1), 2\pi 0, -1) = (-2\pi, 0, -1)$. La grandezza cercata è quindi $\dfrac{(0,-1,1)\cdot(-2\pi,0,-1)}{\sqrt{2}\sqrt{4\pi^2+1}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{4\pi^2+1}}$

3- Si calcoli l'area della superficie "laterale" definita dalla condizione $0 < z = 1 - x^2 - y^2$

R.: La superficie è il grafico di $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ sul disco D di centro l'origine e raggio 1. Per definizione l'area è $\int_D \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}dxdy = \int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$. In coordinate polari tale integrale è $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+4r^2}rdr = \pi \int_0^1 \sqrt{1+4r^2}2rdr$ Con la sostituzione $t = 4r^2$ diventa $\frac{\pi}{4}\int_0^4 \sqrt{1+t}dt$ essendo la primitiva dell'integranda $\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{2}{3}}$ il risulatato è $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$

4- Si trovino le soluzioni del sistema di equazioni differenziali $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{cases}$.
[Ridursi ad un'equazione del secondo ordine].

R.: Derivando la prima equazione $x'' = x' + y'$, si sostituisce y' usando la seconda equazione $x'' = x' + x - y$, e quindi si sostituisce y usando la prima: $x'' = x' + x - x' + x$.
Si ottiene quindi $x'' - 2x = 0$ che ha come soluzioni $ae^{\sqrt{2}t} + be^{-\sqrt{2}t}$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$. Per ognuna di queste $x(t)$ si trova la corrispondnete $y(t)$ grazie alla prima equazione $y(t) = a(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} - b(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t}$. Quindi tutte le soluzioni del sistema sono $ae^{\sqrt{2}t}\binom{1}{\sqrt{2}-1} - be^{-\sqrt{2}t}\binom{-1}{\sqrt{2}+1}$

---

a) Si consideri $P(x,y,z) = (P_1(x,y,z), P_2(x,y,z))$ la proiezione stereografica dal "polo nord" sul piano tangente al "polo sud" per una sfera di centro l'origine e raggio unitario. Si calcolino le coordinate cartesiane delle proiezioni ortogonali, sul piano tangente alla sfera in un punto (x,y,z), dei due vettori $\nabla P_1(x,y,z)$ e di $\nabla P_2(x,y,z)$.
b) Si verifichi direttamente che tali proiezioni hanno lo stesso modulo e sono tra loro ortogonali. Quindi la proiezione steregrafica conserva gli angoli.
c) Si esprima con un integrale elementrare la lunghezza della curva ottenuta proiettando l'arco di cerchio massimo descritto dal cammino $\gamma(t) = (\cos t, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}),\ 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

R. : a) La proiezione stereografica in questione è $\left(\dfrac{2x}{1-z}, \dfrac{2y}{1-z}\right)$.
Quindi $\nabla P_1(x,y,z) = \left(\dfrac{2}{1-z}, 0, \dfrac{2x}{(1-z)^2}\right)$, $\nabla P_2(x,y,z) = \left(0, \dfrac{2}{1-z}, \dfrac{2y}{(1-z)^2}\right)$.
D'altronde la proiezione ortogonale su un piano di un vettore è il vettore meno la sua proiezione ortogonale sulla direzione normale al piano. Per cui essendo l'ortogonale al piano tangente in (x,y,z) alla sfera la direzione di (x,y,z), che nel caso ha modulo 1, le proiezioni cercate sono

$$W_1 = \left(\frac{2}{1-z}, 0, \frac{2x}{(1-z)^2}\right) - \frac{2x}{(1-z)^2}(x,y,z) = \frac{2}{(1-z)^2}\left((1-z,0,x) - x(x,y,z)\right) =$$
$$= \frac{2}{(1-z)^2}(1-z-x^2, -xy, x-xz)$$
$$W_2 = \left(0, \frac{2}{1-z}, \frac{2y}{(1-z)^2}\right) - \frac{2y}{(1-z)^2}(x,y,z) = \frac{2}{(1-z)^2}(-xy, 1-z-y^2, y-yz)$$

b) Si tenga presente che $x^2+y^2+z^2=1$. A parte il comune fattore dei due vettori il modulo al quadrato del primo è $(1-z-x^2)^2 + x^2y^2 + x^2(1-z)^2 = (1-z)^2 - 2(1-z)x^2 + x^4 + x^2y^2 + x^2z^2 + x^2 - 2x^2z = (1-z)^2 - 2(1-z)x^2 + 2x^2 - 2x^2z = (1-z)^2$. Per simmetria tra x e y il secondo vettore ha lo stesso modulo del primo: pari a $\dfrac{2}{1-z}$, fattore di allungamento.
Il prodotto scalare tra i due a meno dei fattori moltiplicativi, è $-xy(1-z-x^2) - xy(1-z-y^2) + xy(1-z)^2 = -2xy + 2xyz + x^3y + xy^3 + xy + xyz^2 - 2xyz = -xy + x^3y + xy^3 + xyz^2 = 0$.
Quindi dati due cammini sulla sfera con velocità nel punto di incidenza U e V, si ha che le velocità delle curve trasformate sono $dPU = (\nabla P_1 \cdot U, \nabla P_2 \cdot U)$ e $dPV(\nabla P_1 \cdot V, \nabla P_2 \cdot V)$. Considerando che U e V sono tangenti alla sfera, e quindi $U = aW_1 + bW_2$, $V = cW_1 + dW_2$, le velocità trasformate sono eguali rispettivamente a $(W_1 \cdot U, W_2 \cdot U) = |W_1|^2(a,b)$ $(W_1 \cdot V, W_2 \cdot V) = |W_1|^2(c,d)$. Quindi il loro prodotto scalare e determinante divisi per il prodotto dei loro moduli sono rispettivamente eguali al prodotto scalare e al modulo del prodotto vettore tra U e V divisi per il prodotto dei moduli. Si noti che $|dPU| = |W_1||U|$.
c) La curva in questione è $\varphi(t) = P(\gamma(t)) = \left(\dfrac{2\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{2}-\sin t}, \dfrac{2\sin t}{\sqrt{2}-\sin t}\right)$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$. La sua lunghezza è quindi $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}dt$.
Si ha $|\varphi'(t)| = \dfrac{2}{1-\frac{\sin t}{\sqrt{2}}}|\gamma'(t)| = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sin t} = \dfrac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sin t)}{1+\cos^2 t} = \dfrac{4}{1+\cos^2 t} + \dfrac{2\sqrt{2}\sin t}{1+\cos^2 t} =$
$$= 4\frac{1+\tan^2 t}{2+\tan^2 t} - 2\sqrt{2}\left(\operatorname{artan}(\cos t)\right)' = \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{artan}\left(\frac{\tan t}{\sqrt{2}}\right) - 2\sqrt{2}\operatorname{artan}(\cos t)\right)'$$
La lunghezza cercata perciò è $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.