Matematica, Anno Accademico 2005-2006, Scienze Geologiche

VII foglio di esercizi: M.Novaga, V.M. Tortorelli

19-20 gennaio 2006

Proposizione Se P è un polinomio con coefficienti complessi $P(z_0) = 0$ se e solo se $P(z) = Q(z)(z - z_0)$. Quindi il polinomio ha al più un numero di radici pari al suo grado.
Teorema fondamentale dell'algebra Ogni polinomio ha almeno una radice complessa.
Corollario Un polinomio ha un numero di radici, con molteplicità, pari al suo grado.
Se $z = a + ib$ con $\overline{z}$ si indica $a - ib$, e si dirà *coniugato* di z.
Osservazione Un polinomio con coefficienti reali ha radici complesse e coniugate.

ESERCIZIO n. 1 Si scrivano in forma cartesiana ($x + iy$ con x e y in $\mathbf{R}$) i seguenti numeri complessi: $(\sqrt{2} + ie)(i - 23)$, $(-4 + 4i)^6$, $\frac{1}{i}$, $\frac{1+i}{((2+i)^2)}$, $1 + i + i^2 + i^4 + i^6$, $\frac{1}{x+iy}$, $\sqrt{2 + 2i}$.

ESERCIZIO n. 2 Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbf{C}$ delle seguenti equazioni: $z^2+1 = 0$, $z^6+1 = 0$, $z^4 + 1 = 0$, $z^2 + 2z + 1 = 0$, $z^2 + 4z + 5 = 0$, $z^2 + 2iz - 1 - i = 0$, $z^2 + z + 1 = 0$.

ESERCIZIO n. 3 Si risolvano le seguenti equazioni: $i\overline{z}^3 = |z|$, $z^2 + |z| + 1 = 0$, $2z^4 + 3z^2 = 0$, $z|z| - 2\mathcal{R}ez = 0, \mathcal{I}mz^2 = 1$

ESERCIZIO n. 4 Si determino le regioni del piano definite dalle seguenti formule: $|z - i| = 2$, $|z - 1| = |z - i|$, $|z - 1| < |z - i|$, $|z - 1| + |z - i| = 2$, $|z - 1| + |z - i| = \sqrt{2}$, $\mathcal{R}ez = 2\mathcal{I}mz$.

ESERCIZIO n. 5 - Si scrivano in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi: 4, $7i$, $3+3i$, $\sqrt{3} - i$, $1 - i$.

- Si scrivano in forma trigonometrica i numeri complessi z per cui si rispettivamente : $z = \mathcal{R}ez > 0$, $|\mathcal{R}ez| < \mathcal{I}mz$, $|z| \leq 1$.

ESERCIZIO n. 6 Trovare le radici seste di -1, quadrate di $1 + i\sqrt{3}$ e cubiche di 1.

Notazione Se $z = x + iy \in \mathbf{C}$ si inidca con e^z il numero $e^x(\cos y + i \sin y)$.

ESERCIZIO n. 7 Per ogni numero complesso $w \neq 0$ vi è un numero complesso z per cui $w = e^z$. Quante sono le soluzioni di $w = e^z$?

ESERCIZIO n. 8 Il prodotto di due numeri complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti. In altri termini, per quanto enunciato nel precedente esercizio $e^z e^w = e^{z+w}$.

ESERCIZIO n. 9 - Si verifichi che le radici n-sime di 1 sono $e_h = e^{i2\pi\frac{h}{n}} = (e_1)^h$, $0 \leq h < n$.

- Fissati n ed m l'insieme dei $e^{i2\pi m\frac{h}{n}}$, $h \in \mathbf{Z}$ è contenuto in quello delle radici n-sime di 1. Coincide con esso se e solo se m ed n non hanno divisori comuni. In altri termini $\left(e^{i2\pi m\frac{1}{n}}\right)^h$, $0 \leq h < n$ sono le radici n-sime di 1 se e solo se m ed n sono primi fra loro.

ESERCIZIO n. 10 L'area del triangolo di veritci u, v, $w \in \mathbf{C}$ è data da $\frac{1}{2}\left|(w - v)\overline{(u - v)}\right|$.

ESERCIZIO n. 11 - Il prodotto scalare tra (x, y) e (u, v) è dato da $\mathcal{R}e\left((x + iy)\overline{(u + iv)}\right)$.
- Che operazione tra numeri complessi da il determinante della matrice di righe (x, y), (u, v)?

ESERCIZIO n. 12 Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni:

$$u' + 2u = 4x,\ u' + u = \cos x,\ u' + au = e^{mx},\ u' - u\sin x = \sin 2x\ ,\quad u' + 2xu = xe^{-x^2},$$

$$u' + \frac{1-2x}{x^2}u = 1\ (x>0)\ ,\quad u' - u = \frac{(1+x^2)e^x}{x}\ (x<0)\ ,\quad u' - \frac{2xu}{1+x^2} = 1+x^2\ ,$$

$$u' + \frac{2}{x}u = \frac{\sin x}{x}\ (x \neq 0)\ ,\quad u' + \frac{nu}{x+1} = e^x(x+1)^n\ (n \in \mathbf{N}),$$

$$xu' = 1\ ,\quad xu' + 2u = \sin x\ ,\quad x(u'-u) = (1+x^2)e^x\ ,\quad (x+1)u' - nu = e^x(x+1)^{n+1}.$$

ESERCIZIO n. 13 Data un'equazione differenziale $u' = f(x,u)$ l'eventuale inversa di una soluzione dovrebbe verificare l'equazione $x' = \frac{1}{f(x,u)}$. Tracciare i grafici approssimativi delle soluzioni dei seguenti problemi riducendosi ad equazioni lineari:

$$u' = \frac{1}{2x-u}\ ,\quad u(1) = 1\ ;\quad u' = \frac{1}{2x-u^2}\ ,\ u(1) = -1\ ;\quad u' = \frac{1}{x+e^u}\ ,\quad u(0) = 3\ ;$$

ESERCIZIO n. 14

a) Un massa puntiforme di grandezza m, in quiete all'istante iniziale t_0, si muove di moto rettilineo soggetta ad una forza proporzionale, per un fattore κ, all'incremento di tempo dall'istante iniziale, ed ad una forza di resistenza del mezzo porporzionale, per un fattore χ, alla velocità. Si espliciti la velocità in funzione del tempo e dei parametri.

b) Un corpo ad un instante t_0 ha temperatura pari a quella dell'ambiente circostante eguale a Θ_0. Il corpo viene riscaldato a tasso costante, pari a δ^2, e disperde calore nell'ambiente in modo proporzionale, per un fattore γ^2, alla differenza tra la sua temperatura e quella dell'ambiente considerata costante. Si espliciti la dipendenza dal tempo della temperatura del corpo.

ESERCIZIO n. 15 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

$$u' = \frac{1-2x}{y^2}\ ,\quad xu' + u = u^2\quad (x>0)\ ,\quad u' + \sqrt{\frac{1-u^2}{1-x^2}} = 0\ ,\quad u' = \frac{1+y^2}{1+x^2}\ ,\quad u' = 100^{x+u}.$$

ESERCIZIO n. 16 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali per *sostituzione*:

$$u' = 3 + \cos(x-u)\ ,\quad u' = \frac{u+x-1}{(x+u)^2+1}\ ,\quad u' = \frac{6x + \frac{u}{x}}{2-\log x}\ ,\quad u' = -\frac{e^x\cos u + 3u}{3x - e^x \sin u}.$$

(*) ESERCIZIO n.17 Trovare un grafico per cui la distanza dall'origine di ogni retta tangente ad un suo punto è uguale alla distanza dall'origine della retta normale nello stesso punto.

ESERCIZIO n. 18 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine:

$$u'' = x + \sin x,\ u'' = \text{artan}x,\ u'' = u' + x,\ u'' = \frac{u'}{x} + x,\ (u'')^2 = u',\ 2xu'u'' = (u')^2 + 1,$$

$$u'' = u,\ u'' = u^{13},\ u'' = 2uu',\ u''u + (u')^2 = x,\ u'' + \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} = 0,\ u'' + u',\ u'' = \frac{u'(e^u-1)}{x},$$

$$u'' = \frac{u}{1+(u')^2}.$$

ESERCIZIO n. 19 Si trovino le soluzioni dei seguenti problemi ai dat iniziali:

$$u'' = \frac{2xu'}{1+x^2},\ u(0) = 1,\ u'(0) = 3;\ u'' = \frac{u'}{x} + \frac{x}{u'},\ u(1) = 1,\ u'(1) = 1;$$

$$u'' = xu' + u + 1,\ u(0) = 1\ ,u'(0) = 0.$$

ESERCIZIO n.20 Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni lineari a cofficienti costanti o la soluzione dei problemi ai dati iniziali:
$u'' - 2u' + u = 0,\ u(1) = 0,\ u'(1) = e$; $u'' - 3u' + 2u = 0,\ u(0) = 1,\ u'(0) = 0$; (Faedo-Modica)
$u'' + u' - 2u = 0$; $4u'' - 20u' + 25u = 0$; $u'' - 4u' + 3u = 0,\ u(0) = 6,\ u'(0) = 10$. (Berman)

ESERCIZIO n.21 Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni lineari a cofficienti costanti o la soluzione dei problemi con dati iniziali o al bordo:
$u'' - 3u' + 2u = x^2$; $u'' + 2u' + 10u = x^3 - 1$; $2u'' + u' - u = 2e^x$; $u'' + 2u' + 5u = \sin x$;
$u'' - 3u' + 2u = f(x)$ nei seguenti casi:
$10e^{-x},\ 3e^{2x},\ 2\sin x,\ 2x^3 - 30,\ 3x + 5\sin 2x,\ 2e^x - e^{-2x},\ \sinh x$;
$u'' + u = \dfrac{1}{\cos x}$;
$u'' + u = \sin 2x,\ x \in [0;\pi],\ u(0) = u(\pi) = 0.$

ESERCIZIO n.22 Se $y \not\equiv 0$ è soluzione di: $u''(x) + u'(x)f(x) + u(x)g(x) = 0$, allora

$$z(x) \ = cy(x) \int^x \frac{e^{-\int^t f(s)ds}}{y^2(t)} dt$$

è soluzione della stessa.

ESERCIZIO n.23 Si trovino le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$u'' - \tan x \cdot u' + 2u = 0,\ u'' - u' + \frac{y}{x} = 0.$$

(*) ESERCIZIO n.24 Si trovino tutte le soluzioni $(u;\lambda)$, ove le incognite sono: u funzione definita su $[0;\pi]$, e λ numero reale, dei problemi:

$u'' = \lambda \cdot u,\ u(0) = u(\pi) = 0$; $u'' = \lambda \cdot u,\ u(0) = u(\pi)$;
$u'' = \lambda \cdot u,\ u(0) = u(\pi),\ u'(0) = u'(\pi)$; $u'' = \lambda \cdot u,\ u(0) = u(\pi) = u'(0) = u'(\pi) = 0.$