Matematica, Anno Accademico 2005-2006, Scienze Geologiche

M. Novaga, V.M. Tortorelli

I foglio di esercizi
dal 4 ottobre al 12 ottobre 2005

Programma, registro degli argomenti svolti e materiale relativo al corso possono essere reperiti in rete all'indirizzo http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html ivi selezionando il nome del corso.

ESERCIZIO n. 1 (saggio preliminare)

-Si completino le eguaglianze seguenti: $2^4 = \dots$; $2^{-4} = \dots$; $2^{1/4} = \dots$; $2^{-1/4} = \dots$.

-Sapendo che $\log_{10} x^3 > 0$ quali sono tra le seguenti le affermazioni corrette? $x > 1$; $x = 1$; $0 < x < 1$; $x < 0$.

-Sapendo che due elevato alla decima è eguale a milleventiquattro, dire se è vero o falso che due elevato alla ventinovesima è maggiore di dieci elevato alla nona.

- Se $a + b \neq 0$, l'espressione $\frac{a^2+ba}{a^2-b^2}$ è equivalente a quale tra le seguenti altre espressioni? $1 - \frac{a}{b}$; $\frac{a}{b}$; $\frac{1}{a+b}$; 0; $\frac{1+a}{1+b}$.

- La disequazione $\frac{x^4-1}{x-2} < 0$ è soddisfatta per quali tra i seguenti valori di x? $x < 1$; $-1 < x < 1$; $x < -1$; $x < -1$ o $1 < x < 2$;.

- Quante colonne diverse che non diano tutte lo stesso risultato si possono giocare al Totocalcio? (Ricordiamo che vi sono tre simboli da disporre in una colonna di tredici elementi) A) $3^{13} - 13$; B) $3 \cdot 13^3 - 3$; C) $13^3 - 3$; D) $(3^{12} - 1)3$.

- Qual è il più grande tra i numeri: -33; $-\frac{2}{5}$; $-\frac{2}{9}$; -1?

- Un esame è costituito da una prova scritta e da una prova orale. Il 70% dei candidati ha superato lo scritto e tra questi il 90% ha superato anche l'orale. Determinare la percentuale, sul totale dei candidati, di coloro che hanno superato lo scritto ma non l'orale.

- Una funzione ha come parte del suo grafico un segmento che sale in verticale più di quanto si sposti orrizontalmente e che incontra l'asse orizzontale di riferimento a sinistra del punto di incontro di questo con l'altro asse di riferimento. Quale delle seguenti funzioni può avere grafico corrispondente alla descrizione data? $y = 6x^2+x$; $y = 2x$; $y = x^3$; $y = 2x+2$.

- L'area del triangolo di vertici $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$, $C = (4, 3)$, è: $2\sqrt{2}$; 3; $\frac{1}{2}$; 1?

- Dire se è possibile costruire un triangolo con i lati lunghi rispettivamente: 2, 2, 4.

- Un angolo misura 50°. Quale, tra le seguenti, è la sua misura in radianti? $\frac{1}{9}\pi$; $\frac{5}{18}\pi$; $\frac{2}{9}$; $\frac{9}{2}\pi$.

- Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
$\sin 1 = 0$; $\sin 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 1 = \frac{\pi}{2}$; $\sin 1$ non ha senso ; $\sin 1 = \frac{1}{2\cos 1} \sin 2$.

- Si consideri la curva determinata dall' equazione $y = -2x^2 + x - 1$. Dire quali di questi punti giacciono su tale curva: $(1, -2)$; $(-2, -1)$; $(-1, 2)$; $(1, 1)$.

- La pendenza della retta passante per i punti $(2, 5)$ e $(1, 3)$ è: -2; $-\frac{4}{3}$; $\frac{1}{2}$; 2?

- I primi 1000 Km di un viaggio in treno vengono fatti pagare di più . Quale delle seguenti formule permette di calcolare il costo del biglietto per viaggi superiori a 1000 Km, indicando con x la lunghezza del viaggio? $700 + 0.05 \cdot (x - 1000)$; $0.7 \cdot x + 0.05 \cdot x$; $0.7 \cdot (x - 1000) + 0.05 \cdot x$.

- Si verifichino le seguenti identità:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy, \; x^2 - y^2 = (x - y)(x + y),$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2), \; x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$\frac{x}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2}, \; \frac{x^3-8}{x^2-1} = x + \frac{x-8}{x^2-1}$$

DEFINIZIONE: dato $y \in \mathbf{R}$ e $n \in \mathbf{N}$ si dice che $x \in \mathbf{R}$ è la sua *radice aritmetica* $n°$ se:

1) $x \geq 0$,

2) $x^n = y$. Si scrive $x = \sqrt[n]{y}$.

TEOREMA: Ogni numero reale non negativo ha un'unica radice $n°$.

ESERCIZIO n. 2 Si provi che :

- un numero reale negativo non ha radice quadrata;
- il numero $\sqrt{3}$ non è razionale (rapporto di numeri interi).

ESERCIZIO n. 3 - Dati $a,\ b,\ c$, con $a > 0$, si trovino in dipendenza i tre numeri dati altri tre numeri $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ per cui:

$$ax^2 + bx + c = (\alpha x + \beta)^2 + \gamma$$

- Si tovi una formula risolutiva per le soluzioni *reali* dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, e si dica quando ha senso.

- Si verifichi che se $x^2 + sx + p = 0$ allora s è 'meno la somma delle soluzioni' e p 'il prodotto delle soluzioni'.

ESERCIZIO n. 4 Si disegnino i sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ dati da

$$\{x \in \mathbf{R} :\ x^2 + 3x - 10 > 0\},\ \{x \in \mathbf{R} :\ \tfrac{x^3+27x}{x-10} > 0\},\ \{x \in \mathbf{R} :\ \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+3} > 0\}$$

ESERCIZIO n. 5 Si disegnino i sottoinsiemi del piano, identificato con $\mathbf{R^2}$ (l'insieme delle coppie di numeri reali), rispettivamente definiti da ciascuna delle seguenti condizioni:

$(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ x + y + 3 = 0,\ x^2 - y^2 = 0,\ x^2 + y^2 = 0,\ (x + y)^2 = 1,\ (x + y)^2 = 0,\ x^2 + y^2 = 4,\ x^2 = y,\ x^2 - y^2 = 1,\ 4x^2 + y^2 = 1$

ESERCIZIO n. 6 - Si scriva l'equazione che determina (come luogo di zeri) la retta passante per il punto di coordinate $(1, 1)$e per il punto $(3, 4)$.

- Si scriva l'equazione che definisce la retta per $(1, 1)$ e con direzione parallela a $(1, 2)$.
- Si scriva l'equazione della retta passante per $(1, 1)$ e che dista 1 dall'origine $(0, 0)$.
- Si trovino l'equazioni delle rette per il punto $(1, 1)$ e che toccano il sottoinsieme del piano definito dalla condizione $x^2 + y^2 = 1$ in un solo punto.
- Si trovi l'equazione che individua la retta che tocca l'insieme definito da $y = x^2$ solo nel punto di coordinate $(1, 1)$.

ESERCIZIO n. 7 Si scrivano le rette del precedente esercizio come cammini 'lineari' in $\mathbf{R}^2$ del tipo $t \mapsto (a, b) + t(c, d)$ al variare di t in $\mathbf{R}$.

ESERCIZIO n. 8 - Si provi che la somma dei primi n numeri naturali $1 + 2 + \ldots + n$ è $\frac{n(n+1)}{2}$

- Si provi $1 + x + \ldots x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$, e quindi generalizzando l'ultima parte dell' esercizio 1 si mostri che : $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + x^{n-k-1}y^k + ... + y^{n-1})$.

(Che dire su $x^n + y^n$?)

- $(1 + x)(1 + x^2) \ldots (1 + x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$

ESERCIZIO n.9 Si denoti con $n!$ il prodotto dei primi n numeri interi. Si provi $n! \leq n^n$. Si provi anche $n^n \leq \frac{(2n)!}{n!}$.

- Se n è un numero naturale la sua scrittura *in base* 10 è $r_0+r_1\cdot 10+r_2\cdot 100+\ldots+r_k\cdot 10^k=n$ ove $0\le r_0,\ r_1\ldots<10$, sono rispettivamente r_0 il resto della divisione di n per 10, r_2 il resto della divisone per 10 del quoziente prima ottenuto etc. .
-Analogamente si esprimono i numeri naturali *in base* b, ove b è un altro numero naturale, con i resti delle divisioni per b dei successivi quozienti a partire da n.

ESERCIZIO n.10 - Si scriva 100 in base 2. In base decimale a cosa corrisponde la scrittura 100 in base 2?
Si provi che un numero è divisibile per 9 se e solo se la somma delle cifre della sua espresione decimale è anch'essa divisibile per 9.
[$10=9+1,\ 100=99+1$ etc. .

ESERCIZIO n. 11 Dato $x\in\mathbf{R}$ si definisce *parte intera* di x l'unico numero n intero $x-1<n\le x$. Se $c_0=[x]$, $c_n=[10^n(x-c_0)-10^{n-1}c_1\ldots-10c_{n-1}]$ allora $x=c_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{100}+\ldots=c_0,c_1c_2c_3\ldots$.

ESERCIZIO n. 12 - Si provi che $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$, se $x,\ y\ge 0$ e se ne dia un'interpretazione geometrica.
- Si provi $(1+x)^n\ge 1+nx$ se $x\ge 0$. Lo si provi anche per $x>-1$.

ESERCIZIO n. 13 - Si scriva un poilinomio che non ha radici reali.
- Si scriva un polinomio a coefficienti razionali che ha almeno una radice reale e nessuna radice razionale.
- Si provi che un polinomio con coefficienti interi se ha una radice razionale questa è uno dei rapporti tra i divisori del termine noto e quelli del coefficiente di grado massimo.

ESERCIZIO n. 14 Si divida il primo per il secondo polinomio nelle seguenti coppie: $(x+1,\ x^2+1)$, $(x^2+1,\ x+1)$, $(x^{101}+10,\ x+1)$

ESERCIZIO n. 15 - In quanti modi si possono colorare con al più due colori n oggetti?
- In quanti modi si può dividere in al più due parti un insieme di n elementi (pari-dispari)?
- Si motivi l'eguaglianza $2^n=\binom{n}{0}+\ldots+\binom{n}{n}$.

ESERCIZIO n.16 - In quanti modi si possono colorare n oggetti con al più tre colori diversi?
- In quanti modi si può suddividere un insieme con n elementi in al più tre parti?
- In quanti modi si possono colorare n oggetti con al più m colori diversi?

ESERCIZIO n.17 - Assegnati m numeri, $k_1,\ldots k_m$, la cui somma sia n, esprimere in termini di fattoriali in quanti modi si possono distribuire n oggetti tra m persone in modo che la prima ne abbia k_1, la seconda k_2 etc..
- Si deduca una formula analoga a quella di Newton per $(a_1+\ldots a_m)^n$.
- In quanti modi si può suddividere un insieme di otto elementi in quattro insiemi che abbiano rispettivamente uno tre elemnti, un altro un elemento, e i rimanenti due elementi?

ESERCIZIO n.18 - Identificando i monomi che differiscono solo per l'ordine delle variabili che vi compaiono (e.g. $x^2y=xyx$), quanti sono i monomi con coefficiente 1 di decimo grado in due variabili ? Più in generale quanti sono i monomi con coefficiente 1 di grado n in m variabili?

ESERCIZIO n. 19 Quali dei seguenti insiemi sono limitati?

$$\{x \in \mathbf{R}:\ x > 1\},\ \{x \in \mathbf{R}:\ 0 > x > 1\},\ \{x \in \mathbf{R}:\ 2 > x > 1\},\ \{x \in \mathbf{R}:\ x^2 + 14 = 0\}$$
$$\{x \in \mathbf{R} : x^7 + x^3 = x^2\ \},\ \{x \in \mathbf{R}:\ 2 > \tfrac{x-1}{x-2} > 1\},\ \{x \in \mathbf{R}:\ 2 > \tfrac{x^3-1}{x^2-2} > 1\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^6 y + xy^2 = y^2\ \},\ \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3:\ 2 > \tfrac{x+y+z}{x-y-z} > 1\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2:\ 2 > \tfrac{xy}{x^2+y^2} > 1\},$$

DEFINIZONE: - Se A e B sono insiemi l'insieme che ha come elementi *esattamente* quelli che sono *sia* elementi di A *sia* elementi di B è detto *intersezione* tra i due. Questo insieme si denota con $A \cap B$.

- L'insieme i cui elementi sono quelli che sono *indifferentemente* elementi di A *ovvero* elementi di B è detto *unione* dei due. Questo insieme si denota con $A \cup B$.

- Se si considera un'iniseme $\mathcal{A}$ i cui elementi sono insiemi l'insieme che ha come elementi *esattamente* quelli che sono elementi comuni a *ognuno* degli insiemi $A \in \mathcal{A}$ è detto *intersezione* di $\mathcal{A}$. Si denota con $\bigcap_{\mathcal{A}}$.

- L'insieme che ha come elementi quelli che sono elementi di *almeno uno* degli insiemi $A \in \mathcal{A}$ è detto *unione* di $\mathcal{A}$. Si denota con $\bigcup_{\mathcal{A}}$.

(- Quindi se $\mathcal{A}$ è l'iniseme che ha come elementi solo i due insiemi A e B si ha , $\bigcup_{\mathcal{A}} = A \cup B$.
- A parole si può dire che la condizione di essere elemento di un'intersezione è quella di soddisfare *tutte* le condizioni una per ciascun insieme della famiglia di cui si sta facendo l'intersezione. Nel caso finito è la condizione ottenuta dalla *congiunzione* di tali condizioni: sta in qusto *e* in quello *e* etc. . La condizione di essere elemento di un'unione è quella di soddisfare *almeno una* delle condizioni tra quelle che determinano gli insiemi della famiglia di cui si sta facendo l'unione. Nel caso finito è la condizione ottenuta dall'alternativa tra tali condizioni: sta in questo *o anche* in quello *o* etc . .)

ESERCIZIO n. 20 Trovare estremo superiore ed inferiore degli insiemi e dire se sono rispettivamente massimo e minimo:

$$]0;1],\ [1;4[\cap(]0;2[\cup]3;5]),\ \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \left[\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right];\ \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \left]\frac{1}{n};n\right[,\ \bigcup_{m\in\mathbf{N}}\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \left]\frac{1}{n+m};m+n\right[,$$
$$\{x \in \mathbf{R}:\ |x^2+1| < |x-3| - 1\},\ \{x \in \mathbf{R}:\ |x^2| < \left|x - \tfrac{3}{x}\right| - 1\},$$
$$\{x \in \mathbf{R}:\ |x^2-1| < |x+3| - 2\},\ \{x \in \mathbf{R}:\ \ : 4 > |1-x||1+x| + (1-x)^2\}$$
$$\{x \in \mathbf{R}:\ x^2 + |x-1| < 2\} \cap \mathbf{Q}$$
$$\{x:\ \tfrac{x+1}{|x-2|} - 2|x| > 0\},\ \{x:\ \log x^2 \geq \log(2x-1)\} \cap \mathbf{Q},\ \{x:\ \log_x(2x-1) \geq 2\}$$
$$\bigcap_{y\in\mathbf{R}} \{x:\ |x+y| + y \leq 2\};\ \ \bigcup_{y\in\mathbf{R}} \{x:\ |x+y| + y \leq 2\};$$
$$\{z \in \mathbf{R}:\ z = \tfrac{xy}{x^2+y^2}:\ 0 < x,\ y < 1\},\ \{z \in \mathbf{R}:\ z = \tfrac{xy}{x+y}:\ 0 < x,\ y < 1\},$$
$$\{z \in \mathbf{R}:\ z = \tfrac{nm}{n^2+m^2}:\ n,\ m = 1,\ 2...\},\ \{z \in \mathbf{R}:\ z = \tfrac{nm}{n+m}:\ n,\ m = 1,\ 2...\},$$
$$\{z \in \mathbf{R}:\ z = \tfrac{m-2}{3n}:\ n,\ m = 1,\ 2...\}, \{z \in \mathbf{R}:\ z = \tfrac{1}{n} + (2m+1)\tfrac{\pi}{2} : n, m = 1,\ 2\ldots\},$$

ESERCIZIO n. 21 Calcolare estremo superiore, inferiore, e indicare se sono valori massimi o minimi, delle seguenti espressioni al variare degli argomento come rispettivamente specificato:
$7n^3 - n^4,\ n \in \mathbf{N};\ 7n^6 - n^8,\ n \in \mathbf{N};\ 7x^6 - x^8,\ x \in \mathbf{R};\ \sin\frac{1}{n},\ n \in \mathbf{N};\ \sqrt{n} - [\sqrt{n}],\ n \in \mathbf{N};$
$\dfrac{x^6+x^4+1}{x^4+2x^2-3},\ x^4+2x^2-3 \neq 0;\ \dfrac{n^6+n^4+1}{n^4+2n^2-3},\ n \in \mathbf{N}\ n^4+2n^2-3 \neq 0;\ (x^2+1)e^{-(x^2-1)},\ x \in \mathbf{R};$
$\dfrac{n+1}{n},\ n \in \mathbf{N};\ \ \dfrac{2m}{m^2+1},\ m \in \mathbf{Z};\ \ (-n)^n + \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbf{N};\ \ n + \dfrac{1001}{n},\ n \in \mathbf{N};\ \ x^2 + \dfrac{1001}{x^2+1},\ x \in \mathbf{R}$

ESERCIZIO n. 22 Calcolare estremo superiore, inferiore, e specificare se sono valori massimi o minimi, delle seguenti espresssioni:

$$n\cos m\pi - \frac{3}{2+n},\ m,\ n \in \mathbf{N};\quad \frac{n^2-m^2}{m^2+n^2},\quad m,\ n \in \mathbf{N};\quad \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2y^2},\ xy>0;$$

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{x^2y^2z^2},\ xyz>0$$

$$\sum_{1\le n\le 100} |a_n| \text{ al variare di } a_1,\ldots a_{100} \text{ tra le famiglie per cui } \sup\{|a_n|; 1\le n\le 100\} < 1.$$

ESERCIZIO n. 23 Se due sottoinsiemi A e B del piano sono eguali all'insieme delle coppie (x,y) per cui $f(x,y)=0$ e rispettivamente a quello delle coppie per cui $g(x,y)=0$ che sottinsieme del piano è individuato da $f(x,y)\cdot g(x,y)=0$? E da $f(x,y)^2+g(x,y)^2=0$?

ESERCIZIO n. 24 - Dati $a_1 \neq a_2$ trovare il più grande y per cui $|x-a_1|+|x-a_2|\ge y$ per ogni $x\in\mathbf{R}$ (per ogni punto la somma delle distanze dai punti dati sia più grande di y).

*- Si generalizzi se sono dati n punti diversi $a_1,\ a_2,\ldots a_n$.

DEFINIZIONE: si dice *segmento* tra due punti P e Q dello spazio o del piano l'insieme dei punti del tipo $P+t(Q-P)+=(1-t)P+tQ$ al variare di t tra 0 ed 1 compresi. Nel caso in cui si vogliano escludere gli estremi si dovranno escludere i rispettivi estremi del dominio ove varia il parametro t.

ESERCIZIO n. 25 - Si scriva in forma parametrica il segmento parallelo al vettore dall'origine a $(1,2,3)$, passante per $(4,5,6)$ e lungo 14.
- Si scriva in forma parametrica il triangolo di vertici $(1,2,3)$, $(4,6,8)$, $(5,7,9)$.
- Si trovino due numeri reali $a,\ b$ per cui $(1,2)=a(1,1)+b(2,1)$. Si mostri che sono unici.

ESERCIZIO n. 26 Si provi che le rette $X=P+tQ$, $t\in\mathbf{R}$ e $X=A+sB$, $s\in\mathbf{R}$ sono parallele se e solo se esiste $\lambda\in\mathbf{R}$, non nullo, tale che $Q=\lambda B$.

OSSERVAZIONE

Prodotto scalare Dalle formula di addizione per le funzioni trigonometriche, indicando con $|(x,y)|=\sqrt{x^2+y^2}$ la distanza dall'origine O del punto di coordinate (x,y) si ha che dato due punti P e Q nel piano di coordinate rispettivamente (a,b) e (α,β)

$$a\cdot\alpha+b\cdot\beta=|P||Q|\cos\theta \qquad \text{ove } \theta \text{ è la misura in radianti dell'angolo } POQ.$$

Del tutto analogamente dati due punti nello spazio di coordinate (a,b,c) e (α,β,γ) si ha

$$a\cdot\alpha+b\cdot\beta+c\cdot\gamma=|P||Q|\cos\theta$$

ove qui $|(x,y,z)|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e θ è la misura dell'angolo POQ nel piano POQ.

DEFINIZIONE: dati due vettori P e Q nel piano (o nello spazio) la *somma dei prodotti delle coordinate di egual posto* si dice prodotto scalare tra i due vettori. Esso si indica con $(P\cdot Q)$ o $P\bullet Q$. Quindi $P\bullet P=|P|^2$. Si ha la diseguaglianza notevole: $-|P|\cdot|Q|\le P\bullet Q\le|P|\cdot|Q|$. L'equazione come luogo di zeri che individua una retta nel piano ovvero un piano nello spazio non dice altro che si considerano i punti (x,y,z) che hanno un prodotto scalare di valore costante d con un vettore prefissato (a,b,c): $ax+by+cz=d$. Semipiani e semispazi vengo invece individuati dalle relative diseguaglianze.

ESERCIZIO n. 27 - Determinare l'equazione della retta passante per $(2,-1)$ e perpendicolare

alla retta di equazione $4x - 3y + 12 = 0$.
-Determinare la retta passante per $(0,0)$ e per il centro di $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$.
- Si calcoli la distanza del punto $(-3,2)$ dalla retta di equazione $4x - 3y + 12 = 0$.
- Si calcoli la distanza del punto $(-3,2,-1)$ dal piano di equazione $4x - 3y + 2z - 12 = 0$.
- Si determini come luogo di zeri il piano parallelo ai vettori dall'origine a $(1,2,3)$ e $(4,5,6)$ e passante per $(7,8,9)$.
- Si determini come luogo di zeri il piano passante per $(1,2,3)$, $(4,5,6)$ e $(7,8,9)$.

ESERCIZIO n. 28 - Verificare che gli insiemi $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ |x| \leq 1, \ |y| \leq 1\}$, $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ sono quadrati; determinarne i vertici e le lunghezze dei lati.
- Che poliedri individuano gli insiemi $\{(x,y,z) : \ |x| \leq 1, \ |y| \leq 1, \ |z| \leq 1\}$, $\{(x,y,z) : |x| + |y| + |z| \leq 1\}$. Qual'è la distanza dall'origine delle facce del secondo?

ESERCIZIO n. 29 - Si suddivida il segmento di estremi $(1,2)$ e $(2,1)$ in quattro parti di egual lunghezza mediante i tre punti P, Q, R. Si calcolino le coordinate di tali punti.
- Dati $P = (-2,5)$ e $Q = (4,13)$, trovare le coordinate di un punto R sul segmento PQ tale che $|P - R| = 2 \ |Q - R|$.
- Se $R = (2,3,2)$ è punto medio del segmento PQ e $P = (7,5,6)$, trovare le coordinate di Q.

ESERCIZIO n. 30 Dimostrare che per ogni $P, \ Q$ si ha $|P - Q|^2 = |P|^2 + |Q|^2 - 2 \ P \bullet Q$.

ESERCIZIO n. 31 - Provare che il triangolo di vertici $(2,-1)$, $(4,2)$ e $(5,1)$ è isoscele.
- Provare che il triangolo di vertici $(-3,3)$, $(-1,3)$ e $(11,-1)$ è rettangolo.
- Calcolare la lunghezza della mediana uscente dal punto A relativa al triangolo ABC, ove $A = (-1,1)$, $B = (0,-6)$, $C = (-10,-2)$.
- Scrivere l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti da $(0,2)$ e $(2,1)$.
- Scrivere l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti dai punti $(0,2,1)$ e $(2,1,3)$.

ESERCIZIO n.32 - Si provi che le rette $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ sono parallele se e solo se esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che $a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$.

ESERCIZIO n. 33 (determinante)- Si calcoli l'area del triangolo di vertici $(1,2)$, $(6,7)$, $(-1,3)$.
- Si calcoli il volume del parallelepipedo nello spazio di vertici $(1,1,1)$, $(2,2,3)$, $(3,2,2)$, $(2,3,2)$, $(5,5,5)$.
- Si determini l'area del triangolo con vertici l'origine, $(1,1,1)$ e la proiezione ortogonale di questo sul piano per l'origine e i punti $(1,2,2)$, $(2,2,1)$.

ESERCIZIO n. 34 - Si provi che i quattro punti $(1,1,1)$, $(3,2,2)$, $(2,3,2)$, $(4,4,3)$ giacciono su uno stesso piano.
- Si calcolino le aree dei tre parallelogrammi ottenuti proiettando ortogonalmente sui piani coordinati il parallelogramma, nello spazio, di vertici $(1,1,1)$, $(3,2,2)$, $(2,3,2)$, $(4,4,3)$.
- Si verifichi che la radice quadrata della somma dei quadrati delle precedenti aree è eguale all'area del parallelogramma nello spazio.

ESERCIZIO n. 35 - Si provi che due vettori, (a,b) e (α,β), sono uno multiplo dell'altro se e solo se $a\beta - b\alpha = 0$.

- Dimostrare che il sistema $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma=0 \end{cases}$ per ogni dato (c,γ) è risolubile univocamente se e solo se risulta $a\beta-b\alpha\neq 0$; in tal caso se ne scriva la soluzione (x,y).

ESERCIZIO n. 36 - Si trovino le soluzioni dei sistemi:

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x+2y+z=1 \\ -x-y+z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x+2y+z=1 \\ -x-y+z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ -x-y-z=0 \end{cases}$$

ESERCIZIO n. 37 - Due vettori nello spazio sono uno multiplo dell'altro se e solo se il loro prodotto vettore è nullo.
- Si verifichi che dati due vettori nello spazio (α,β,γ) e (A,B,C) il vettore individuato dalla terna $(det((\beta,\gamma),(B,C)),-det((\alpha,\gamma),(A,C)),det((\alpha,\beta),(A,B)))$ è ortogonale ai due vettori.
- Si deduca dal precedente punto che tre vettori nello spazio stanno sullo stesso piano passante per l'origine se e solo se il determinante delle loro coordinate è nullo.
- Si provi che il sistema $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta \\ Ax+By+Cz=D \end{cases}$ ha un'unica soluzione per ogni dato (d,δ,D) se e solo se $det((a,b,c),(\alpha,\beta,\gamma),(A,B,C))\neq 0$.
- Per quali dati(d,δ,D) è risolubile se invece il determinante è nullo? noindent - Si provi che le rette $ax+by+c=0$ e $a'x+b'y+c'=0$ sono perpendicolari se e solo se esiste $\lambda\in\mathbf{R}$ tale che $\lambda a=-b'$, $\lambda b=a'$.
- Si provi che: le rette $X=P+tQ$, $t\in\mathbf{R}$, e $ax+by+c=0$ sono perpendicolari se e solo se i vettori Q e (a,b) sono proporzionali; parallele se e solo se Q e $(b,-a)$ sono proporzionali.

DEFINIZIONE: un sottoinsieme C dello spazio si dice *convesso* se per ogni coppia di suoi punti contine tutto il segmento tra essi compreso ($t\in[0;1],\ P,\ Q\in C\ \Rightarrow (1-t)P+tQ\in C$). Si osserva che l'intersezione di una famiglia di convessi è un convesso.

ESERCIZIO n. 38 - Si provi che un $[0;1]$, $\{(x,y):x=3y+1\}$, $\{(x,y):y\leq\sqrt{2}x-6\}$, $\{(x,y,z):z=3\}$, $\{(x,y,z):x-y\leq z\}$ sono convessi.
- Si provi che $\{(x,y):y\geq|x|\}$, $\{(x,y):y\geq x^2\}$, $\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leq 1\}$ sono convessi.

DEFINIZONE: dati n punti P_1, ..., P_n si *dice combinazione baricentrica* o *media pesata* di essi un qualsiasi punto del tipo $m_1P_1+\ldots m_nP_n$, ove $m_1+\ldots m_n=1$, $0\leq m_1,\ \ldots m_n\leq 1$. I numeri $m_1,\ \ldots m_n$ si diranno anche pesi della combinazione.
DEFINIZIONE: dato un insieme A si dice *inviluppo convesso di* A l'insieme dei punti che si ottengo con combinazioni baricentriche di elementi di A.
PROPOSIZIONE: Per un sottoinsieme A del piano l'inviluppo convesso si ottiene con medie pesate di terne di punti di A. Nello spazio di quaterne.

ESERCIZIO n. 39 Trovare le coordinate del baricentro (definito come punto di incontro delle mediane) di un triangolo conoscendo le coordinate dei suoi tre vertici.

ESERCIZIO n. 40 - Si esprima il triangolo ottenuto dall' intersezione dei sempipiani $x\geq 1$, $y\geq 1$, $y\leq -2x+3$ come inviluppo convesso di tre punti.
- Mostrare che in generale l'inviluppo convesso di un insieme A non è eguale all'intersezione dei semipiani, che contengono ognuno la retta che lo individua, e che contengono A.