

DIFFERENZIABILITÀ

16 dicembre al 20 dicembre 2005

Programma, registro degli argomenti svolti e materiale relativo al corso possono essere reperiti in rete all'indirizzo <http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html> ivi selezionando il nome del corso.

TANGENZA A GRAFICI E DIFFERENZIABILITÀ

DEFINIZIONE Una funzione $(x, y) \mapsto f(x, y)$ si dice che ammette derivata parziale rispetto alla prima variabile nel punto (p, q) se la funzione di una variabile $t \mapsto f(t, q)$ è derivabile in p . Analogamente rispetto alla seconda variabile considerando la derivabilità in q di $t \mapsto f(p, t)$. Per più di due variabili si estende la definizione come segue $(x_1 \dots x_k) \mapsto f(x_1, \dots x_k)$ si dice che ammette derivata parziale rispetto all' i -esima variabile nel punto $p = (p_1 \dots p_k)$ se la funzione di una variabile $t \mapsto f(p_1 \dots t_{i\text{o}} \text{ posto } \dots p_k)$ è derivabile in p_i .

Nel caso per le derivate parziali si usano le notazioni $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, $D_{x_i}f(p)$, $D_i f(p)$.

DEFINIZIONE Una funzione si dice che ammette derivata direzionale nella direzione $v \in \mathbf{R}^k$, $v \neq 0$, in un punto p del suo dominio se la funzione di una variabile $t \mapsto f(p + tv)$ è derivabile in $t = 0$.

In altre parole se la restrizione della funzione alla retta passante per p e di direzione v , intesa come composizione con la parametrizzazione lineare di tale retta $t \mapsto p + tv$, risulta derivabile. In altri termini se il grafico di f intersecato il piano verticale per la retta di direzione v e passante per p è il grafico di una funzione derivabile di un avariabile.

La notazione usata $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$, $D_v f(p)$.

OSSERVAZIONE Ammettere derivata parziale rispetto alla variabile i -esima è quindi la stessa cosa che avere derivata direzionale nella direzione dell' i -esimo asse coordinato:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(p)$$

OSSERVAZIONE: quindi per calcolare la derivata parziale di una funzione $f(x, y, z)$ di tre variabili rispetto alla seconda variabile nel punto $(1, 2, 3)$ si calcola la funzione in $(1, y, 3)$ e quindi si calcola la derivata di $y \mapsto f(1, y, 3)$ per $y = 2$.

OSSERVAZIONE Una funzione vettoriale ammette derivate direzionali se e solo se ciò accade per le sue componenti.

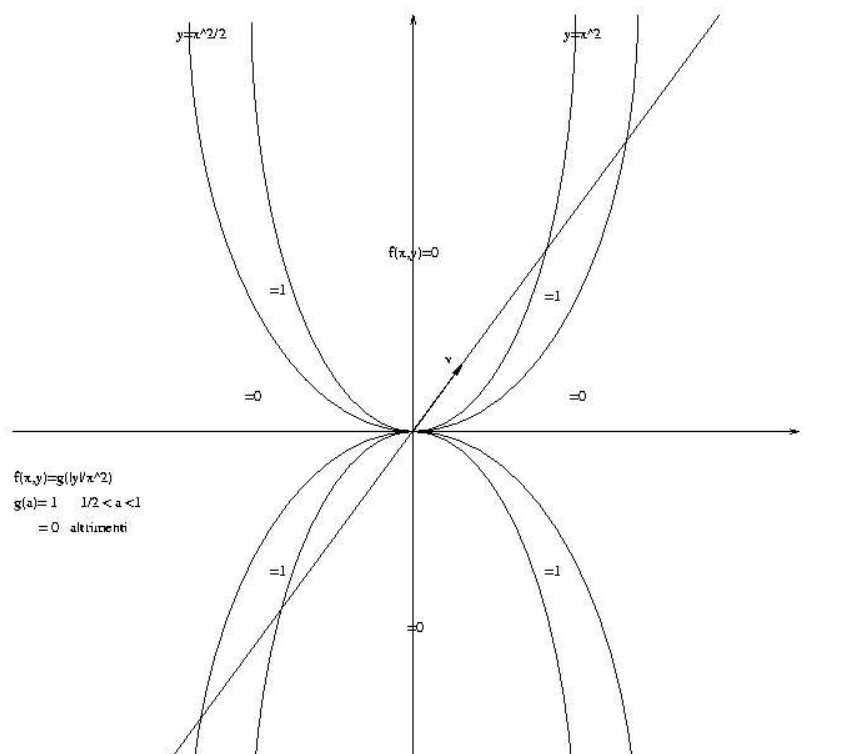
Vale la pena provare la seguente proprietà

PROPOSIZIONE Sia A aperto connesso. Allora una funzione che abbia le derivate parziali nulle in ogni punto di A è costante su A .

DIM.: dati due punti di A li si può collegare con una spezzata con lati paralleli agli assi. Ma la funzione ristretta a questi lati ha derivata nulla per ipotesi quindi è costante su ognuno dei lati. In particolare ha lo stesso valore nei due arbitrari punti di A .

PROBLEMA: si ricorda la definizione elementare di tangenza di un piano L ad un insieme C in un comune punto p : detta $\pi_L(q)$ la proiezione ortogonale su L si deve avere $\lim_{q \rightarrow p, q \in C} \frac{dist(q, \pi(q))}{dist(p, q)} = 0$.

Non è detto che per una funzione che in un punto p abbia tutte le derivate direzionali il grafico abbia un piano tangente in $(p, f(p))$. Anzi la funzione può risultare discontinua in tale punto:



Moltiplicando per x la funzione f si mostra che una funzione continua con tutte le derivate direzionale comunque può avere grafico senza piano tangente. Il concetto *sufficiente* per avere un grafico con piano tangente è quello di *approssimazione lineare* della funzione:

DEFINIZIONE Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^m$. p interno ad A .

La funzione f si dice *differenziabile* in p se vi è una funzione lineare $L_p : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^m$ ($(L_p(v))_i = \sum_{1 \leq j \leq k} a_{ij} v_j$, $1 \leq i \leq m$, l'approssimante lineare) per cui

$$f(x) = f(p + v) = f(p) + L_p(x - p) + \varepsilon \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow p} \frac{|\varepsilon|}{|x - p|}$$

Nel caso si usa la notazione $L_p = df_p$: tale applicazione lineare si dice *differenziale* di f in p . Per esemplificare nel caso $k = 2$, $m = 1$, $p = (x_0, y_0)$ devono esistere due numeri a, b per cui

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

il differenziale di f in p è quindi l'applicazione lineare $(u, v) \mapsto au + bv = (a, b) \cdot (u, v)$

OSSERVAZIONE: immediatamente confrontando le definizioni nel caso $k = 1$ si ha che una funzione vettoriale di una variabile è differenziabile se e solo se è derivabile

OSSERVAZIONE: se la funzione è differenziabile in un punto allora esistono tutte le derivate parziali: per l'osservazione precedente e la definizione di differenziabilità con $x = p + te_i$

Si ottiene che $(df_p v)_i = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) v_j$. Ovvero la matrice associata all'applicazione lineare differenziale è quella che ha come righe le derivate parziali delle funzioni componenti.

Analogamente se f è differenziabile in p allora ha le derivate direzionali in p e $\frac{\partial f}{\partial v}(p) = df_p v$

NOTAZIONE: nel caso $m = 1$ se una funzione è differenziabile in p il vettore con componenti le derivate parziali si dice *gradiente* della funzione nel punto e si scrive $\nabla f(p)$. Le derivate direzionali sono quindi $v \cdot \nabla f(p)$

In generale la matrice con m righe e k colonne associata al differenziale di una funzione da \mathbf{R}^k in \mathbf{R}^m , $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq k}}$ si dice *matrice Jacobiana*, indicata anche con $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$, in maniera suggestiva

se si unifica con la notazione $y = f(x)$ si ottiene $\frac{\partial y}{\partial x}$.

OSSERVAZIONE Per una funzione differenziabile a valori reali $\nabla f(p)$ se *non nullo* da la direzione di massima crescita della funzione nel punto: ovvero

$$\max_{|v|=1} \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} = |\nabla f(p)|$$

TEOREMA 1 Se $f : A \subseteq \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$ è differenziabile in p allora il grafico di f ha nel punto $(p, f(p))$ un piano k dimensionale tangente che è il grafico traslato nel punto $(p, f(p))$ della funzione lineare differenziale in p : cioè il grafico di $x \mapsto f(p) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)(x_j - p_j)$.

Per esemplificare nel caso $k = 2$ ed $m = 1$, funzioni di due variabili a valori reali, il piano tangente al grafico in $(p, q, f(p, q))$ è il grafico della funzione lineare affine

$$(x, y) \mapsto f(p, q) + \frac{\partial f}{\partial x}(p, q)(x - p) + \frac{\partial f}{\partial y}(p, q)(y - q). \text{ Come luogo di zeri in } \mathbf{R}^3 \text{ è}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p, q)x + \frac{\partial f}{\partial y}(p, q)y - z - \frac{\partial f}{\partial x}(p, q)p - \frac{\partial f}{\partial y}(p, q)q + f(p, q) = 0$$

Per il calcolo effettivo utilizzando le derivate parziali e la verifica che una funzione è differenziabile una condizione sufficiente, se pur non necessaria, è data dal seguente teorema

TEOREMA 2 (Differenziale totale) Si consideri una funzione che ha tutte le derivate parziali in una palla di centro un punto interno p del suo dominio di definizione. Se le derivate parziali sono continue nel punto p allora la funzione è differenziabile almeno nel punto stesso.

TEOREMA 3 Un funzione differenziabile in p è continua in p .

DEFINIZIONE Sia A aperto di \mathbf{R}^k . Sia f una funzione a valori in \mathbf{R}^m differenziabile in ogni punto di A . La funzione che associa ad un punto di A il differenziale di f in quel punto si dice funzione differenziale o funzione tangente alla funzione f . Identificando lo spazio vettoriale delle funzioni lineari da \mathbf{R}^k in \mathbf{R}^m con \mathbf{R}^{mk} la funzione differenziale è individuata dalla funzione da A in \mathbf{R}^{mk} data da $x \in A \mapsto (D_1 f_1(x), \dots, D_k f_1(x), \dots, D_1 f_m(x), \dots, D_k f_m(x))$

REGOLE PER LE FUNZIONI DIFFERENZIABILI

Dalla derivabilità delle funzioni elementari di una variabile, dai seguenti asserti e dal teorema del differenziale totale si può riconoscere la differenziabilità di molte funzioni

PROPOSIZIONE Le funzioni costanti sono differenziabili in ogni punto e il loro differenziale è la funzione lineare nulla.

PROPOSIZIONE Le funzioni lineari affini

$$(x_1 \dots x_k) \mapsto (a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k + b_1, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mk}x_k + b_m) = Ax + b =: f(x)$$

sono differenziabili in ogni punto p il loro differenziale è indipendente dal punto ed è la parte lineare della funzione stessa $df_p(v) = (a_{11}v_1 + \dots + a_{1k}v_k, \dots, a_{m1}v_1 + \dots + a_{mk}v_k) = Av$.

In effetti nel caso si ha $f(x) = f(p) + A(x - p)$ con resto nullo, ovvero per funzioni a valori reali di due variabili affini $ax + by + c$ le derivate parziali sono rispettivamente le funzioni costanti a e b che sono ovviamente continue.

PROPOSIZIONE Il prodotto di due funzioni a valori reali differenziabili in p è differenziabile in p e vale la formula analoga a quella delle derivate: $d(f \cdot g)_p = f(p)dg_p + g(p)df_p$

TEOREMA 4 (Differenziale di una funzione composta, Regola della catena)

Siano $f : A \subseteq \mathbf{R}^k \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^m$, $g : B \rightarrow \mathbf{R}^h$, $y = f(x)$

Se g è differenziabile in $y = f(p)$ ed f è differenziabile in $x = p$ allora la funzione composta $g \circ f$, $x \mapsto g(f(x)) =: g \circ f(x) : A \rightarrow \mathbf{R}^h$ è differenziabile in p .

Il suo differenziale è dato dall'iterazione dei differenziali: $dg \circ f_p(v) = dg_{f(p)}(df_p(v))$

In particolare vale la seguente regola della catena per le derivate parziali:

$$\frac{\partial g(f(x))}{\partial x_i}(p) = \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(p)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) = \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

COROLLARIO Se f e df_p sono invertibili allora vi è $df_{f(p)}^{-1} = (df_p)^{-1}$, i.e. $\frac{\partial x}{\partial y} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1}$.

OSSERVAZIONE: ne segue che le funzioni differenziabili su un dato insieme a valori in \mathbf{R}^m sono uno spazio vettoriale: per esempio $x \mapsto f(x) + g(x)$ si vede come composizione di $(u, v) \mapsto u + v$ con $x \mapsto (f(x), g(x))$.

TANGENTE AD IMMAGINI

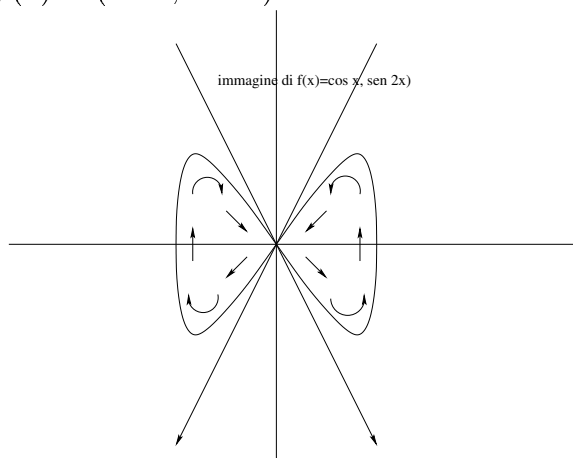
Come già osservato, data una funzione vettoriale di una variabile derivabile $x \mapsto f(x)$ se per un valore del parametro z si ha $f'(z) \neq 0$ allora l'immagine di un intervallo sufficientemente piccolo attorno a z ha tangente nel punto $f(z)$ data dall'immagine del cammino lineare $t \mapsto f(z) + tf'(z)$: poichè vi è differenziabilità $f(x) = f(z) + f'(z)(x - z) + \varepsilon$ con $|\varepsilon|/|x - z| \rightarrow 0$ per $x \rightarrow z$. Quindi confrontando la distanza tra un punto dell'immagine dalla sua proiezione ortogonale sulla retta in questione:

$$\frac{|f(x) - \left(\left((f(x) - f(z)) \cdot \frac{f'(z)}{|f'(z)|} \right) \frac{f'(z)}{|f'(z)|} + f(z) \right)|}{|f(x) - f(z)|} = \frac{|\varepsilon - \left(\varepsilon \cdot \frac{f'(z)}{|f'(z)|} \right) \frac{f'(z)}{|f'(z)|}|}{|f'(z)(x - z) + \varepsilon|} \leq \frac{2|\varepsilon|}{|f'(z)(x - z) + \varepsilon|}$$

infinitesimo (analoga la prova che il grafico di una funzione differenziabile ha piano tangente)

- Se in un punto $f(y)$ "ci si ferma" ("velocità" nulla $f'(y) = 0$) in effetti si può ripartire con inclinazione diversa: e.g. $f(x) = (x^3, |x|x^2)$, $x = y = 0$, la cui immagine è il grafico del modulo che non ha una sola tangente in $(0, 0)$.

- D'altronde un cammino può ripassare con diversa inclinazione per punti ove è "già" passato, per questo il vettore derivata non nullo da la tangente solo all'immagine di un segmento abbastanza piccolo: e.g. $f(x) = (\cos x, \sin 2x)$



"passa" da $(0, 0)$ sia per $x = y_1 = \pi/2$ che per $x = y_2 = 3\pi/2$ ma con velocità sghembe.

- Per un cammino derivabile con derivata sempre non nulla ed iniettivo vi è quindi tangente in ogni punto dell'immagine. Il grafico di una funzione di una variabile $x \mapsto g(x)$ derivabile può essere visto come immagine di un cammino vettoriale $x \mapsto f(x) = (x, g(x))$ che è sempre iniettivo e con vettore derivata $f'(x) = (1, g'(x))$ sempre non nullo.

Quindi per il grafico di una funzione f di più variabili differenziabile in un punto p i cammini $t \mapsto (p + tv, f(p + tv))$ hanno immagini con tangente nel punto $(p, f(p))$ data dalla retta $s \mapsto (p + sv, f(p) + s \frac{\partial f}{\partial v}(p)) = \frac{d(p+tv, f(p+tv))}{dt}(s)$.

- Per le immagini di funzioni vettoriali f di più variabili differenziabili vale il seguente:

TEOREMA 5 (del rango) Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^{k+h}$ con derivate parziali continue. Se la matrice del differenziale df_p ha rango massimo (l'immagine dell'applicazione lineare $(t_1 \dots t_k) \mapsto df_p(t_1 \dots t_k)$ ha dimensione k) vi è una palla $B_r(p)$, centro p e raggio r , per cui:

1- l'immagine della palla $f(B_r(p))$ è grafico di una funzione differenziabile con derivate continue rispetto al k -piano per l'origine di \mathbf{R}^m immagine del differenziale (localmente grafico)

2- il k -piano tangente in $f(p)$ a $f(B_r(p))$ è il traslato di questo

$$f(p) + t_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \dots + t_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = f(p) + df_p(t_1 \dots t_k)$$

cioè i vettori delle derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(p)$ sono base del k -piano tangente in $f(p)$. Per superficie in \mathbf{R}^3 $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ il tangente in $f(p)$ in coordinate cartesiane è dato dalla condizione di ortogonalità $((x, y, z) - f(p)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = \det\left((x, y, z) - f(p), \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)\right) = 0$

TANGENTE A LUOGHI DI ZERI

Dato l'insieme di livello $C = \{x : f(x) = f(p)\}$ di una funzione a valori reali differenziabile in un punto p si considera un cammino derivabile $\gamma : [-1, 1] \rightarrow C$ tutto in C che all'istante $t = 0$ passi per p con velocità v non nulla ($\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$).

Poichè tale cammino sta in C la funzione $t \mapsto f(\gamma(t))$ risulta essere costante. La sua derivata è nulla, per cui $\gamma'_1(0) \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + \gamma'_k(0) \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = 0$ cioè $\nabla f(p)$ è ortogonale a tutte le direzioni tangenti a curve che giacciono su $\{f(x) = f(p)\}$. Necessariamente se l'insieme di livello avesse un piano tangente in p dovrebbe essere l'ortogonale alla direzione individuata da $\nabla f(p)$.

Il seguente teorema asserisce che per una funzione differenziabile con derivate continue se $\frac{\partial f}{\partial v}(p) \neq 0$ allora l'insieme che passa per p ove f è costante, $\{x : f(x) = f(p)\}$, "vicino a p " è il grafico rispetto all'iperpiano ortogonale alla direzione v di una funzione con derivate continue. Si considera come direzione quella dell'ultima coordinata, e, dato $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k$, si pone $x' = (x_1, \dots, x_{k-1})$, $x'' = x_k$, identificando x con (x', x'') .

TEOREMA 6 (Teorema del Dini delle funzioni implicite) Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ con derivate continue. Se $\frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \neq 0$ vi sono: $R > 0$, $r > 0$, $\varphi : B_R(p') \rightarrow [p_k - r, p_k + r] = B_r(p'')$ per cui:

$$1- x_k = x'' = \varphi(x') \Leftrightarrow |x' - p'| \leq R, |x'' - p''| \leq r \text{ e } f(x) = f(x', x'') = f(p)$$

2- φ è differenziabile con derivate continue e dalla regola della catena si ha

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i}(p') = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p') = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)}{\frac{\partial f}{\partial x_k}(p)}$$

COROLLARIO Nelle precedenti ipotesi l'insieme $\{x : f(x) - f(p) = 0\}$, luogo di zeri, ha piano tangente in p dato dal luogo di zeri del differenziale traslato in p :

$$(x_1 - p_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_k - p_k) \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = (x - p) \cdot \nabla f(p) = df_p(x - p) = 0$$

OSSERVAZIONE: i seguenti esempi mostrano che le precisazioni nell'enunciato sono necessarie. Con $k = 2$ e $f(x, y) = x^2 - y^2$, $p = (0, 0)$ il livello zero della funzione è dato da due rette incidenti che non sono grafico rispetto ad alcuna direzione in nessun rettangolo contenente p . Con $f(x, y) = x - \sin y$ si vede che è necessario restringere il luogo di zeri anche nella direzione dei valori della funzione implicita perchè sia un grafico. Con $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $p = (0, 1)$ si vede che è necessario restringersi nel dominio.

OSSERVAZIONE: se la derivata direzionale rispetto a v è nonnulla in p allora il livello della funzione per p in un "cilindro retto" con altezza parallela a v è un grafico

Più in generale vale il seguente teorema delle funzioni implicite che permette di identificare i tangenti agli insime di soluzioni di sistemi di equazioni. Il precedente teorema rientra nel seguente enunciato con $m = 1$ e $h = (k - 1)$.

Si introducono le seguenti notazioni:

Se $f : A \subseteq \mathbf{R}^{m+h} \rightarrow \mathbf{R}^m$ e x_{j_1}, \dots, x_{j_m} sono m distinte variabili tra quelle di $x = (x_1 \dots x_k)$ con $\frac{\partial f}{\partial (x_{j_1} \dots x_{j_m})}(p)$ si indica $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{j_r}}(p) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq r \leq m}}$, la matrice quadrata $m \times m$ estratta dalla matrice Jacobiana di f scegliendo solo le colonne delle derivate rispetto alle m variabili prescelte.

In termini più geometrici significa che si sta considerando la restrizione del differenziale di f in p al sottospazio generato da $e_{j_1} \dots e_{j_m}$. Più in generale se W è un sottospazio di dimensione r generato da $v_1 \dots v_r$ con $\frac{\partial f}{\partial W}(p)$ o $\frac{\partial f}{\partial (w_1 \dots w_r)}(p)$ si indica la restrizione di df_p a W .

A livello di differenziali $\frac{\partial f}{\partial W}(p)$ è il differenziale in 0 della funzione di r variabili $s = (s_1, \dots, s_r) \mapsto f(p + s_1 v_1 + \dots + s_r v_r) = g(s)$ che si identifica con il differenziale in p della restrizione di f a $p + W$.

Se $x \in \mathbf{R}^{m+h}$ si identifica con (x', x'') , ove $x' \in \mathbf{R}^h$ sono le prime h coordinate di x e $x'' \in \mathbf{R}^m$ le ultime m coordinate di x .

TEOREMA 7 Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^{m+h} \rightarrow \mathbf{R}^m$ con derivate continue.

Se df_p ha rango massimo, ovvero la sua immagine ha dimensione m ,

per esempio $\det \left(\frac{\partial f}{\partial x_{1+h}}(p) \dots \frac{\partial f}{\partial x_{m+h}}(p) \right) \neq 0$ allora vi sono:

$R > 0, r > 0, \varphi : B_R(p') \rightarrow B_r(p'')$ per cui:

1- $x'' = \varphi(x')$ ($x_{h+j} = \varphi_j(x_1 \dots x_h)$, $1 \leq j \leq m$) $\Leftrightarrow |x'' - p''| \leq r$ e $f(x) = f(x', x'') = f(p)$

2- φ è differenziabile con derivate continue. Poichè $x' \mapsto f(x', \varphi(x'))$ è costante ha derivate nulle, dalla regola della catena si ha considerando le funzioni coordinate di f e φ come colonne

$$\frac{\partial f_r}{\partial x_i} + \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{\partial f_r}{\partial x_{h+j}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = 0 \text{ cioè } \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial (x_{h+1} \dots x_{h+m})} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \text{ quindi } \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \left(\frac{\partial f}{\partial (x_{h+1} \dots x_{h+m})} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

cioè $d\varphi_{x'} = \frac{\partial x''}{\partial x'} = - \left(\frac{\partial f}{\partial (x_{h+1} \dots x_{h+m})} (x', \varphi(x')) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial (x_1 \dots x_h)} (x', \varphi(x'))$

e dalla regola di Cramer si ha $\frac{\partial x_{h+j}}{\partial x_i}(p') = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(p') = - \frac{\det \frac{\partial f}{\partial (x_{h+1} \dots x_{h+m}) \text{ posto } x_i \dots x_{h+m}}(p)}{\det \frac{\partial f}{\partial (x_{h+1} \dots x_{h+m})}(p)}$

OSSERVAZIONE: a meno di un cambiamento di coordinate si ha che se il differenziale df_p ristretto ad un sottospazio W di dimensione m risulta invertibile, considerato V il sottospazio di dimensione h per cui ogni $x \in \mathbf{R}^{h+m}$ sè eguale a $x_v + x_w$ con $x_v \in V$ e $x_w \in W$ e $x_v \cdot x_w = 0$ allora vi sono R, r per cui $\{f(x) = f(p)\} \cap (V \cap B_R(p_v) \times W \cap B_r(p_w))$ è il grafico rispetto a V di una funzione φ e $d\varphi_{x_v} = - \left(\frac{\partial f}{\partial W}(x) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial V}(x)$

TEOREMA DI INVERTIBILITÀ LOCALE

Il caso limite dei teoremi di rango e delle funzioni implicite è il seguente teorema:

TEOREMA 8: (Invertibilità Locale) Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ con derivate continue

$x \mapsto f(x) = y$.

Se df_p è un'applicazione lineare invertibile ($\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} \neq 0$) allora vi è $R > 0$ per cui :

1- $B_R(p) \subseteq A$, f ristretta a $B_R(p)$ è invertibile, $f(p)$ è interno a $f(B_R(p))$

2- quindi detta g ($y \mapsto g^{-1}(y) = x$) la restrizione di f si ha

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{\partial (g^{-1})_i}{\partial y_j}(y) = (-1)^{i+j} \frac{\det \frac{\partial (f_1 \dots f_{j-1}, f_{j+1} \dots f_m)}{\partial (x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_m)}(g^{-1}(y))}{\det \frac{\partial f}{\partial (x_1 \dots x_m)}(g^{-1}(y))} = (-1)^{i+j} \frac{\det \frac{\partial (y_1 \dots y_{j-1}, y_{j+1} \dots y_m)}{\partial (x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_m)}}{\det \frac{\partial y}{\partial x}}$$