Matematica, Anno Accademico 2003-2004, Scienze Geologiche
V.M. Tortorelli

VII foglio di esercizi: V.M. Tortorelli
dal 2 dicembre 2003 al 4 dicembre 2003

Programma e materiale relativo al corso essere reperito in rete selezionando nella Pagina del Dipartimento la voce Materiale Didattico (http://WWW.dm.unipi.it/didactics/home.html) e quindi selezionando ALTRI CORSI DI LAUREA e Corso di laurea *****

ESERCIZIO n. 1 Un punto si muove su una retta in modo che la distanza dal punto iniziale è proporzionale al quadrato del tempo percorso. In due minuti percorre dodici metri. Si trovi la velocità media: a- nei primi cinque minuti, b- tra il quarto minuto e il settimo.

ESERCIZIO n. 2 a- Calcolare le derivate delle seguenti funzioni
$\sin(100 \cdot x)$, $e^{x^{100}}$, $\log \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$, $\tan x^2 + \tan^2 x$, $\frac{x^2+x-1}{x^3+1}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{1=x^2}}$, $\sin^2 \cos 3x^3$,
$\frac{\text{arsin x}}{\text{arcos x}}$, x^x, $(x \log x)^{\sin \sqrt{x}}$, $\log_x(2^x - x^2)$
b- Calcolare $f'(x^2)$ se $f(x) = x^3$, e se $g(x) = f(x^2)$ calcolare $g'(x)$.

ESERCIZIO n. 3 a- Si trovi la tangente nel punto $(1,1)$ dell'insieme di punti del piano definito da $x^7 + y^7 - 2 = 0$
b- Si trovino le tangenti nel punto $(0,0)$ dell'insieme del piano definito da $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.
c- Si trovi l'angolo di incidenza in $(1,1)$ tra le due curve $y = x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$.

ESERCIZIO n. 4 a- Si provino le relazioni arsin $x +$ arcos $x = \frac{\pi}{2}$, $|\text{artan}x + \text{artan}\frac{1}{x}| = \frac{\pi}{2}$.
b- Si provi che per $x \geq 0$ si ha artan $x \geq \frac{x}{1+x}$, $2x$artan $x \geq \log(1 + x^2)$.

ESERCIZIO n. 5 Si studino i grafici delle seguenti funzioni
$|x^3-1|+3$, $||x|-3|+1$, $x|x^2-1|$, $(x-2|x|)^2$, $x+\cos x$, $\log(x+\sqrt{1+x^2})$, $\frac{1+3e^x}{\sqrt{4+5e^{2x}}}$, $(*)$ arsin$\frac{2x}{1+x^2}$.

ESERCIZIO n. 6 a- Si studi la derivabilità della funzione definita da $x \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, e nulla per $x = 0$.
b- Si studi la derivabilità della funzione definita da $x^2 \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, e nulla per $x = 0$.
* c- Sia $f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Si provi che esiste $f'(0)$ ed è *strettamente positiva*, ma la funzione non è crescente in nessun intervallo contenente 0.

ESERCIZIO n. 7 a- Tra i triangoli rettangoli di ipotenusa di lunghezza assegnata quali hanno area massima?
b- Si trovi il rettangolo con lati paralleli agli assi cartesiani, interamente contenuto in $\{(x,y):\ x^2 \leq y \leq 1\}$ di area massima.
c- Tra i prismi regolari a base triangolare di volume assegnato V quali rendono minima l'area superficiale?

ESERCIZIO n. 8 Si calcolino se esistono i seguenti limiti:
$\frac{\text{arsin } x - x}{x - \text{artan } x}$ $x \to 0$, $\frac{\sqrt{2} - \sin x - \cos x}{\log \sin 2x}$ $x \to \frac{\pi}{4}$, $(\tan x)(\log \sin x)$ $x \to 0$, $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}$ $x \to 0$,
$\frac{\log(1+x) - \tan x}{x \log(1+x)}$ $x \to 0$, $\frac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x+x^2}}$ $x \to +\infty$, $\frac{e^{\sqrt{\log x}}}{\sqrt{x}}$ $x \to +\infty$,
$\left(\frac{\pi}{2} - \text{artan } x\right) \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right)$ $x \to +\infty$

ESERCIZIO n. 9 Sia $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ & . \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ a - Si provi che f è continua su $\mathbf{R}$.
b - Si provi che le derivate di f in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ sono del tipo funzione razionale moltiplicato f.
c - Si provi che f è derivabile infinite volte in $x = 0$.

ESERCIZIO n. 10 a- Si provi che la derivata del prodotto di n funzioni è la somma dei prodotti delle derivate di ognuna delle funzioni per le rimanenti funzioni:
$D(f_1 \cdot \ldots f_n) = Df_1 \cdot f_2 \ldots f_n + \ f_1 \cdot Df_2 \cdot \ldots f_n + \ldots$
a - Si provi $D^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f D^{n-k} g.$
b- Si supponga che la funzione g abbia n derivate nel punto a e che la funzione f abbia n derivate in $g(a)$. Si provi che la funzione composta $x \mapsto f(g(x))$ ha n derivate nel punto a.

ESERCIZIO n. 11 a- Sapendo che f è una funzione con la derivata prima e seconda continue e sapendo che $\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \to e^3$ quando $x \to 0$ si calcolino $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.
* b- Si provi che se $g = f'$ su un intervallo $[a; b]$ allora g assume tutti valori compresi tra il suo estremo superiore e il suo estremo inferiore sull'intervallo $[a; b]$. In particolare la funzione g non potrà avere discontinuità di tipo “salto”. (Si consideri un'opportuna funzione che abbia come valori i coefficienti angolari delle corde sul grafico di f ed un estremo nei punti $(a, f(a))$ nella prima metà dell'intervallo $[a, b]$, ed un estremo in $(b, f(b))$ nella seconda parte).

ESERCIZIO n. 12 a- Si disegni la curva $2y^2 - x(x-1)^2 = 0$.
b- Si disegni a curva $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

ESERCIZIO n. 13 Sia $f(x) = x^7 + x + 1$. Soprovi che la funzione è bigettiva da $\mathbf{R}$ in se. Detta g la sua inversa si calcoli $\lim_{y \to +\infty} g\left(\frac{8y}{y+4}\right)$.

ESERCIZIO n. 14 a- Sia $f(x) = x + \log x$. Si provi che è bigettiva da $[0; +\infty[$ in se.
b- Detta g l'inversa di f si provi che $\frac{\log g(a)}{g(a)} \to 0$ quando $a \to +\infty$.
* c- si determini esplicitamente una funzione h per cui $g(a) - h(a) \to 0$ quando $a \to +\infty$. (Si provi $\log(1 + \frac{\log g(a)}{g(a)}) = \log a + g(a) - a$).

ESERCIZIO n. 15 Si scriva $\sin^2 x$ come differenza di due funzioni convesse.

ESERCIZIO n. 16 Si consideri l'equazione $f(x) = 2x\text{artan } x = 1$. Si provi che ha una sola soluzione positiva α. Si provi che $\alpha \leq 1$. Si provi che $\frac{2}{\pi} \leq \alpha$. Usando la convessità di f si provi inoltre che $\alpha \leq \frac{4}{2+\pi}$.

ESERCIZIO n. 17 Si mostri che le uniche funzioni f per cui $f'(x) = f(x)$ sono le funzioni $x \mapsto \alpha e^x$.

ESERCIZIO n. 18

ESERCIZIO n. 19

ESERCIZIO n. 21

ESERCIZIO n. 22

ESERCIZIO n. 23