Matematica, Anno Accademico 2003-2004, Scienze Geologiche
V.M. Tortorelli

VI foglio di esercizi: P.Acquistapace, V.M. Tortorelli
dal 18 novembre 2003 al 27 novembre 2003

Programma e materiale relativo al corso essere reperito in rete selezionando nella Pagina del Dipartimento la voce Materiale Didattico (http://WWW.dm.unipi.it/didactics/home.html) e quindi selezionando ALTRI CORSI DI LAUREA e Corso di laurea *****

ESERCIZIO n. 1 Usando la definizione di limite si mostri che quando $n \to \infty$ si ha $\frac{1}{n} \to 0,\ n^4 \to \infty,\ \log n \to \infty$.

ESERCIZIO n. 2 Si calcolino per $n \to \infty$ i limiti delle seguenti successioni al variare dei parametri $a \in \mathbf{R}$: $\frac{2^n}{n^3},\ \frac{\log n}{\sqrt{n}},\ \frac{n!}{a^n},\ \frac{n!}{n^a},\ \frac{n!}{n^n},\ \frac{n!}{2^{n^2}}$.

ESERCIZIO n. 3 $*$ a- Si provi che $\sqrt[n]{n} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n}$ (diseguaglianza tra media aritmetica e media geometrica).
b- Si provi che per $n \to \infty$ si ha $\sqrt[n]{n} \to 1$.

ESERCIZIO n. 4 a- $*$ Si provi che se $b_n \to a$ allora la media geometrica e la media aritmetica dei primi n termini tendono ad a per $n \to \infty$.
b- Si provi che se $\sqrt[n]{a_n} \to a \geq 0$ allora a_n tende a 0 se $a < 1$ a $+\infty$ se $a > 1$.
c- Si mostri con diversi esempi che se $a = 1$ la successione a_n può: convergere a 0, a $+\infty$, ad un numero diverso da 0, o non convergere affatto.
d- Si provi che se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a$ allora $\sqrt[n]{a_n} \to a$.

ESERCIZIO n. 5 Calcolare per $n \to \infty$ i limiti di: $\binom{2n}{n},\ \left(\frac{n^n(2n)!}{4^n(n-1)!n!(n+1)!}\right)^{\frac{1}{n}},\ \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

ESERCIZIO n. 6 Calcolare per $n \to \infty$ i limiti di:
$\sqrt[n]{\log n},\ \sqrt[n]{2^n + 3^n},\ \sqrt[n^3]{2^n + 3^n},\ \sqrt[n]{2^n + (-1)^{n+1}},\ \sqrt[n]{(-2)^n + 3^n},\ \sqrt[n]{n!}$.

ESERCIZIO n. 7 Calcolare per $n \to \infty$ i limiti di:
$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, 3^{n+1} - 3^{\sqrt{n^2+1}},\ \sqrt[3]{n+2}\sqrt[3]{n-1},\ \frac{\log(n+1)}{\log n},\ \frac{2^n - 10n^{100} + \log n}{20n + 2^{\sqrt{n}} - \log n^10}$.

ESERCIZIO n. 8 Calcolare per $n \to \infty$ i limiti di: $\frac{\sin 2^n}{\sqrt{n}},\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

ESERCIZIO n. 9 Calcolare per $n \to \infty$ i limiti di:
$n \sin\frac{1}{n},\ n^2(1-\cos\frac{1}{n}),\ n(e^{\frac{1}{n}}-1),\ n\tan\frac{1}{n},\ n\text{artan}\frac{1}{n},\ \sqrt{n^2+n}\sin\tan\frac{1}{n},\ n^2(1-\cos^2\frac{1}{n}),\ \left(\cos\frac{1}{n}\right)^n,$
$n\log(1+\frac{1}{n}),\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \frac{\text{arsin}\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{1}{n}}{\cos^3\frac{1}{n}-1}$.

ESERCIZIO n. 10 Studiare la convergenza delle serie: $\sum \sin\frac{1}{n},\ \sum \cos\frac{1}{n} - 1,\ \sum \frac{\log n}{n^3},\ \sum \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

ESERCIZIO n. 11 Studiare la convergenza delle serie:
$\sum \frac{n^{n+1}n!(n+2)!}{(3n-1)!},\ \sum \frac{3n \cdot n^{n-3}n!(n-2)!}{(3n+1)!},\ \sum \frac{n^n n!(2n-2)!}{(4n+1)!},\ \sum \frac{n^n}{(n!)^2}$.

ESERCIZIO n. 12 Studiare la convergenza delle serie: $\sum \frac{(-1)^n}{40^{\frac{1}{n}}},\ \sum \frac{(-1)^n}{\log n},\ \sum 2^{-\log n} \cos \pi n,$.

ESERCIZIO n. 13 $*$ Si provi che $\sum \sin n$ non converge.

ESERCIZIO n. 14 a- Si provi $\frac{n!}{(n+k)!} = \frac{1}{k-1}\left(\frac{n!}{(n+k-1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+k)!}\right)$ per $n \geq 1, k \geq 2$.
b- Si provi che $\sum_n \frac{n!}{(n+k)!} = \frac{1}{(k-1)(k-1)!}$, per $k \geq 2$.
c- $\sum_n \binom{n+k}{n}^{-1} = 1 + \frac{1}{k-1},\ k \geq 2$.

ESERCIZIO n. 15 Per quali $x \in \mathbf{R}$ convergono rispettivamente le serie:
$\sum (-2)^n e^{-nx}, \sum \frac{n}{n+1}(x-1)^n,\ \ \sum \frac{(n!)^3 x^n}{n(3n)!}, \sum \frac{n}{x^2+n^x}$.

ESERCIZIO n. 16 Si considerino le successioni $a_0 = 0,\ a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$, e $b_0 = \alpha > 0,\ b_{n+1} = \frac{b_n}{b_n+1}$. Si provi che sono monotone, se ne calcolino i limiti a e b e si studino le serie $\sum (a-a_n)^2$, $\sum (b-b_n)$.

ESERCIZIO n. 17 Si calcolino i seguenti limiti di funzione:
$\frac{\sin x}{x}\ (x \to 0),\ \frac{1-\cos x}{x^2}\ (x \to 0),\ \frac{\sin x}{1+\cos x}\ (x \to \pi), \frac{e^x-1}{x}\ (x \to 0),\ x \log x^2\ (x \to 0)$,
$\frac{\sqrt{1-x+x^2}-1}{x}\ (x \to 0),\ \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\ (x \to 0),\ \frac{1-\cos 3x}{x^2}\ (x \to 0),\ \frac{\log(1+x^2)}{1-\cos x}\ (x \to 0)$,
$(x-1)^{-1}\mathrm{arsin}[(x-1)(x+2)^{-1}]\ (x \to 1),\ \frac{\cos\pi - \cos(x+\pi)}{x^2+x^3}\ (x \to 0),\ \frac{\log^2(-x+1)}{\sin^2 x}\ (x \to 0)$.

ESERCIZIO n. 18 Si calcolino i limiti delle seguenti funzioni:
$\frac{\log x}{\sqrt{x}}\ (x \to +\infty),\ \frac{2^x + \log^2 x}{\sqrt{1+4^x+x^3}}\ (x \to +\infty),\ e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}}\ (x \to +\infty),\ \frac{\sin x}{\log x}\ (x \to +\infty)$.

ESERCIZIO n. 19 $*$ Si calcoli usando la definizione $\lim_{x\to\infty} \sum_n \frac{1}{n^2+x^2}$.

Definizione - Una funzione f si dice Lipschitziana se esiste una costante L per cui $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$. Ovvero i rapporti incrementali sono limitati.
- Dato $a \in]0;1[$, una funzione f si dice a-Hölderiana se esiste una costante C per cui $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^a$.
- Una funzione si dice uniformemente continua se $\lim_{\delta\to 0} \sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)| = 0$.

ESERCIZIO n. 21 $*$ a- Una funzione è uniformemente continua se e solo se per ogni coppia di successioni x_n, y_n se $x_n - y_n \to 0$ allora anche $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$. (Si noti che non si richiede che le successioni convergano)
b- **Teorema** Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è uniformemente cont.
c- Una funzione continua che ha limite all'infinito è uniformemente continua.

ESERCIZIO n. 22 a - Le funzioni Hölderiane e Lipschitziane sono uniformemente continue.
b- Il grafico di una funzione Lipschitziana si trova sempre compreso tra due rette di pendenza L e $-L$ centrate in un qualsiasi punto del grafico stesso.
c- Si mostri che $x \mapsto \sqrt{|x|}$ è $\frac{1}{2}$-Hölderiana ma non Lipschitziana.
d- Si mostri che $x \mapsto x + \sin x$ è Lipschitziana, ma $x \mapsto \sin x^2$ non lo è.
e- Si trovino funzioni Lipschitziane ma non Hölderiane. Su quali intervalli una funzione Lipschitziana è anche Hölderiana?
f-$*$ Si trovi una funzione uniformemente continua ma non Hölderiana.

ESERCIZIO n. 23 Si provi che la funzione $x \mapsto \sum_n \frac{1}{n^2+x^2}$ ha massimo su $\mathbf{R}$ ma non ha minimo.