Matematica, Anno Accademico 2003-2004, Scienze Geologiche

P. Acquistapace, V.M. Tortorelli

II foglio di esercizi: V.M. Tortorelli
dal 14 ottobre 2003 al 16 ottobre 2003

Programma e materiale relativo al corso essere reperito in rete selezionando nella Pagina del Dipartimento la voce Materiale Didattico (http://WWW.dm.unipi.it/didactics/home.html) e quindi selezionando ALTRI CORSI DI LAUREA e Corso di laurea *****

ESERCIZIO n. 1 a- Traslando il grafico di $x \mapsto x^2$ con uno spostamento di $(4, 0)$ di quale funzione si ottiene il grafico?

b- Traslando il grafico di $x \mapsto x^3$ con uno spostamento di $(-1, 0)$ di quale funzione si ottiene il grafico?

c- Traslando il grafico di $x \mapsto |x|$ con uno spostamento di $(-1, 2)$ di quale funzione si ottiene il grafico?

d- Il simmetrico rispetto all'asse verticale del grafico di $x \mapsto (x-1)^2 + \sin(x - \sqrt{3})$ di che funzione è grafico?

e- Il simmetrico rispetto all'asse verticale del grafico di $x \mapsto x^3 - 6x - \cos x$ di che funzione è grafico?

f- Il simmetrico del grafico di $x \mapsto (x-2)^3 + 1$ rispetto alla bisettrice degli assi di che funzione è grafico?

g- Che dire della stessa simmetria per il grafico di $x \mapsto x^2$?

ESERCIZIO n. 2 Si disegnino in modo o approssimativo i grafici delle funzioni:

a- $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$ $x \mapsto x^5$, $x \mapsto x^4$, $x \mapsto |x|^7$;

b- $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \sqrt[4]{|x|}$;

c- $x \mapsto \sqrt[15]{x+5} - 3$, $x \mapsto -\sqrt{2-x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{3x-3}$.

ESERCIZIO n. 3 Mostrare con metodi elementari che il raggio del cerchio inscritto in un triangolo è dato dall'area del triangolo diviso metà della lunghezza del perimetro dello stesso.

ESERCIZIO n. 4 Trovare le coordinate del baricentro (definito come punto di incontro delle mediane) di un triangolo conoscendo le coordinate dei suoi tre vertici.

ESERCIZIO n. 5 Si scrivano le rette tangenti al cerchio $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ (x-5)^2 + (y-3)^2 = 4\}$ e passanti per l'origine.

ESERCIZIO n. 6 Trovare l'estermo superiore dei coefficienti angolari delle rette passanti per l'origine che intersecano la regione del piano $\{(x, y) : (3x - y)(x - \frac{y}{2}) = 1\}$.

FORMULARIO

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$,
Per $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$: $\sin\alpha < \alpha$, $\cos\alpha \leq \frac{\sin\alpha}{\alpha} \leq 1$,
$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$, $\sin\alpha\sin\beta = \frac{-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$, $\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$,
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$, $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\arcsin x = \alpha, x \in [-1,1] \Leftrightarrow \sin\alpha = x \ \alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$,
$\arccos x = \alpha, x \in [-1,1] \Leftrightarrow \cos\alpha = x \ \alpha \in [0,\pi]$,
$\arctan x = \alpha, x \in (-\infty,\infty) \Leftrightarrow \tan\alpha = x \ \alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$,
$\sin x = \sin x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + 2k\pi, \pi - x_0 + 2k\pi$, $\cos x = \cos x_0 \Leftrightarrow x = \pm x_0 + 2k\pi$,
$\tan x = \tan x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + k\pi$.

ESERCIZIO n. 7 Calcolare $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{7\pi}{8}$.

ESERCIZIO n. 8 Verificare le seguenti relazioni ed interpretarle geometricamente:
$\cos(x+\pi) = \cos(x-\pi) = -\cos x$, $\sin(x+\pi) = \sin(x-\pi) = -\sin x$;
$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$, $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$, $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ (se $|x| \leq \frac{\pi}{2}$
$|\cos x - \cos y| \leq |x-y|$, $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$.

ESERCIZIO n. 9 Trovare l'intersezione $A \bigcap B$ dove
$A = \{x \in \mathbf{R} : x^4 + |x-3| = \sin\left(x\frac{\pi}{2}\right)\}$ e $B = \{x \in \mathbf{R} : |x| \leq 2\}$.

ESERCIZIO n. 10 Risolvere le seguenti equazioni: $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$, $\sin x + 3|\sin x| = 2$, $-\cos^6 x + \sin^3 x\cos^3 x + \sin^6 x = 0$.

ESERCIZIO n. 11 Trovare tutti gli x per cui rispettivamente: $\sin x < \frac{1}{2}$, $4\sin x\tan x > \frac{3}{\cos x}$, $\frac{1+\cos^2 x}{1+\sin x} > 2$.

ESERCIZIO n. 12 Calcolare l'estremo superiore ed inferiore dell'insieme:
$\{\sin\frac{n-1}{2n}\pi : \ n \in \mathbf{N} \}$.

ESERCIZIO n. 13 Disegnare i grafici delle funzioni: $x \mapsto -\sin x$, $x \mapsto \sin 3x$, $x \mapsto \cos\frac{x}{2}$, $x \mapsto 3\sin x$, $x \mapsto \tan(x - \frac{\pi}{2})$, $x \mapsto |\sin x|$, $x \mapsto \sin^2 x$.

ESERCIZIO n. 14 Dire se le seguenti funzioni sono periodiche ed indicarne il periodo: $x \mapsto \sin(\pi^2 - \pi x)$, $x \mapsto |\sin x| + |\cos x|$, $x \mapsto \sin(x^2)$, $x \mapsto 3\sin^2 x + \sin\frac{x}{2}$, $x \mapsto \sin^5 x + 3\cos^7 2x + 1$.

ESERCIZIO n. 15 Mostrare che $\frac{1}{2} + \cos x = \frac{\sin\frac{3}{2}x}{2\sin(x/2)}$.

ESERCIZIO n. 16 Provare le seguenti formule: $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$,