Corso di Laurea in Scienze Geologiche, A.A. 2003-2004, Matematica

30 ottobre 2003

Definizione: - Si dice *rango* di una matrice il numero massimo per cui una sottomatrice quadrata con tale dimensione ha determinante non nullo.
Definizione: Se $A = (a^i_j)_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$ è una matrice con m righe ed n la *matrice trasposta* è $(a^j_i)_{1\le j\le n,\ 1\le i\le m} =_{\mathrm{def}} A^t$. Quindi la trasposta di una matrice con una riga ed n colonne $(a, b \ldots)$ sarà $\begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \end{pmatrix}$, con n colonne ed una riga.
NOTAZIONE: un elemento di $\mathbf{R}^d$ considerato come *vettore* (di *spostamento* ovvero *velocità* etc.) su cui si agisce conviene scriverlo come matrice con d righe ed una colonna. Se si considera come matrice relativa ad un'applicazione lineare da $\mathbf{R}^d$ ad $\mathbf{R}$ (come vettore che agisce come *forza* ovvero *impulso* etc.) come matrice con una riga e d colonne. Nel primo caso le coordinate generiche vengono scritte con indici in alto, nel secondo con indici in basso.
- Questa convenzione si estende quando: si rappresenta una *funzione lineare* da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ come azione di una matrice con il prodotto (scalare) *riga* i^a *della matrice per colonna* del vettore dato per avere la i^a componente del vettore risultato; quando si rappresenta la *composizione* di due funzioni lineari come prodotto *righe per colonne* delle matrici ad esse rispettivamente associate.
Esercizio: la relazione tra trasposto e prodotttto righe per colonne è $(AB)^t = B^t A^t$.
- Si dimostra che il rango di una matrice con m righe ed n colonne $A = (a^i_j)_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$ è la *dimensione dell'immagine* dell'applicazione lineare da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$ associata:

$$(x^1, \ldots, x^n)^t = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \left(a^1_1 x^1 + \ldots a^1_n x^n, \ldots, a^m_1 x^1 + \ldots a^m_n x^n\right)^{\mathbf{t}} = \left(\sum\nolimits_{1\le j\le n} a^i_j x^j\right)^{\mathbf{t}}_{1\le i\le m}$$

Definizione: - Il luogo di zeri di una funzione polinomiale di secondo grado in n variabili:

$$\sum_{1\le i,j\le n} a^i_j x^j x_i + 2 \sum_{1\le i\le n} b_i x^i + c\,, \quad \sum_{1\le i,j\le n} |a^i_j|^2 \neq 0, \text{ cioè } \ \mathbf{x}^t A \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^t\mathbf{x} + c\,, \ \ A \neq \mathbf{0}_{n\times n}$$

$$\widetilde{\mathbf{x}}^t \widetilde{A} \widetilde{\mathbf{x}}\ , \quad \widetilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}\ , \quad \widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & \mathbf{b}^t \\ \hline \mathbf{b} & A \end{array}\right)\ , \quad A \neq \mathbf{0}_{n\times n}$$

si dice *quadrica*. Se $n = 2$ *conica*. Una quadrica si dice *non degenere* se $\det\widetilde{A} \neq 0$.
Osservazione: Poiché: $\sum a_{ij} x_i x_j = \sum \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2} x_i x_j$, si assume che A, e quindi $\widetilde{A}$, sia una *matrice simmetrica*; *i.e.* $a_{ij} = a_{ji}$.
Osservazione: si é identificato $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ con il sottospazio affine degli $\begin{pmatrix} x^0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1}$ con la prima coordinata eguale ad 1: $x^0 = 1$. Conviene quindi osservare che il gruppo affine su $\mathbf{R}^n$ puó essere identificato con un sottogruppo, del gruppo lineare su $\mathbf{R}^{n+1}$, che agisce su tale sottospazio affine di $\mathbf{R}^{n+1}$ nel seguente modo: alla trasformazione affine $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{w} + N\mathbf{x}$ da $\mathbf{R}^n$ in se si associa l'azione della matrice:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \hline \mathbf{w} & N \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{w} + N\mathbf{x} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \hline \mathbf{z} & P \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \hline \mathbf{w} & N \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \hline \mathbf{z} + P\mathbf{w} & PN \end{array}\right)\ , \quad \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \hline \mathbf{w} & N \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \hline -N^{-1}\mathbf{w} & N^{-1} \end{array}\right) = Id_{n+1}$$

Nelle variabili $\mathbf{y} = -\mathbf{v} + M^{-1}\mathbf{x}$, considerando che $\widetilde{\mathbf{x}} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \hline M\mathbf{v} & M \end{array}\right)\widetilde{\mathbf{y}}$, si ottiene :

$$\widetilde{\mathbf{y}}^t \left[\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{v}^t M^t \\ \hline \mathbf{0} & M^t \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} c & \mathbf{b}^t \\ \hline \mathbf{b} & A \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \hline M\mathbf{v} & M \end{array}\right) \right] \widetilde{\mathbf{y}}$$

CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE CONICHE

Ogni conica puó essere trasformata in una delle seguenti con un cambiamento di coordinate affine del tipo $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{w} + N\mathbf{x}$.

			$\det A > 0$:	A CENTRO
$x^2 + y^2 - 1 = 0$	Ellisse reale	$\bigcirc$	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$, $\det\ \widetilde{A} < 0$;	
$x^2 + y^2 + 1 = 0$	Ellisse immaginaria (vuoto)	$\emptyset$	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$, $\det\ \widetilde{A} > 0$;	
$x^2 + y^2 = 0$	Ellisse degenere (un punto)	$\cdot$	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 2$.	
			$\det A < 0$:	
$x^2 - y^2 - 1 = 0$	Iperbole	) (	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$;	
$x^2 - y^2 = 0$	Iperbole degenere (rette incidenti)	χ	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 2$,	
			$\det A = 0$:	
$y^2 - x = 0$	Parabola	$\cup$	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$, $\mathrm{rk}A = 1$	
$y^2 - 1 = 0$	Parabola degenere (rette parallele)	$=$	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 2$, $\mathrm{rk}A = 1$	
$y^2 + 1 = 0$	Parabola degenere (vuoto: rette immaginarie separate)	$\emptyset$	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 2$, $\mathrm{rk}A = 1$	
$y^2 = 0$	C. doppiamente degenere (retta "doppia")	—	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 1$	

Una famiglia di invarianti classificante é quindi data da $\mathrm{sign}(\det A)$, $\mathrm{rk}\widetilde{A}$, $\mathrm{rk}A$, $\mathrm{sign}(\det\widetilde{A})$.

CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE QUADRICHE NON DEGENERI

Ogni quadrica non degenere puó essere trasformata in una delle seguenti con un cambiamento di coordinate affine.

		$\mathrm{rk}\widetilde{A} = n+1$
$\sum_{i=1}^{p}(x^i)^2 - \sum_{i=p+1}^{n}(x^i)^2 - 1 = 0$	Tipo ellisse-iperbole	$\det A \neq 0$
$\sum_{i=1}^{p}(x^i)^2 \ - \sum_{i=p+1}^{n-1}(x^i)^2 \ - x^n = 0$	Tipo parabola	$\mathrm{rk}A = n-1$

QUADRICHE NELLO SPAZIO

		$\det A > 0$
$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$	Ellissoide	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 4$, $\det\widetilde{A} < 0$
$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$	Ellissoide immaginario (vuoto)	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 4$, $\det\widetilde{A} > 0$
$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	Ellissoide degenere (un punto)	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$, $\det\widetilde{A} = 0$
		$\det A < 0$
$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$	Iperboloide iperbolico ad una falda	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 4$, $\det\widetilde{A} > 0$
$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$	Iperboloide ellittico a due falde	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 4$, $\det\widetilde{A} < 0$
$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	Iperboloide degenere (doppio cono)	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$, $\det\widetilde{A} = 0$
		$\det A = 0$, $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 4$
$x^2 + y^2 - z = 0$	Paraboloide ellittico	$\mathrm{rk}A = 2$ $\det\widetilde{A} < 0$
$x^2 - y^2 - z = 0$	Paraboloide iperbolico (sella)	$\mathrm{rk}A = 2$ $\det\widetilde{A} > 0$
		$\det A = 0$, $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$
$x^2 - y = 0$	Paraboloide degenere (cilindro parabolico)	$\mathrm{rk}A = 1$
$x^2 \pm y^2 \pm 1 = 0$	Cilindri su coniche non degeneri con centro, eventualmente il vuoto	$\mathrm{rk}A = 2$
		$\det A = 0$, $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 2$
$x^2 \pm 1 = 0$	Vuoto o piani paralleli	$\mathrm{rk}A = 1$
$x^2 \pm y^2 = 0$	Retta o piani incidenti	$\mathrm{rk}A = 2$
		$\det A = 0$, $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 1$
$x^2 = 0$	Piano“doppio”	$\mathrm{rk}A = 1$