Esame di Matematica - Scienze geologiche

Prova scritta del 14 gennaio 2004 - tema n.1

Prima parte

Esercizio 1 Date le rette $y = \pm 3x$ e fissato il punto $P = (-5, -12)$, trovare due numeri positivi a e b tali che l'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

passi per P ed abbia tali rette come asintoti.

Esercizio 2 Si consideri la successione definita da

$$a_n = n^2 \left(\sqrt{1 + n^4} - \sqrt{5 + n^\alpha} \right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

e se ne calcoli il limite (se esiste) al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Seconda parte

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x) = e^{100x} \left| \frac{x^2}{100} - 1 \right|, \qquad x \in \mathbb{R},$$

se ne determinino:

(i) i punti di massimo e di minimo relativo,

(ii) i limiti a $\pm\infty$,

(iii) gli eventuali asintoti.

Esercizio 4 Calcolare l'integrale

$$\int_5^{10} \frac{1}{x - 2\sqrt{x-1}} \, dx.$$

Esame di Matematica - Scienze geologiche

Prova scritta del 14 gennaio 2004 - tema n.2

Prima parte

Esercizio 1 Date le rette $y = \pm 2x$ e fissato il punto $P = (-13, -24)$, trovare due numeri positivi a e b tali che l'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

passi per P ed abbia tali rette come asintoti.

Esercizio 2 Si consideri la successione definita da

$$a_n = n\left(\sqrt{1+n^2} - \sqrt{3+n^\alpha}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

e se ne calcoli il limite (se esiste) al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Seconda parte

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x) = e^{-100x}\left|\frac{x^2}{100} - 1\right|, \qquad x \in \mathbb{R},$$

se ne determinino:

(i) i punti di massimo e di minimo relativo,

(ii) i limiti a $\pm\infty$,

(iii) gli eventuali asintoti.

Esercizio 4 Calcolare l'integrale

$$\int_{\ln 10}^{\ln 100} \frac{1}{e^x - 1}\, dx.$$

Istruzioni per l'uso

Questa prova scritta può essere utilizzata nei modi seguenti.

- Risolveranno soltanto gli esercizi della prima parte gli studenti del primo anno che:

  - hanno fatto male il primo compitino e bene il secondo;
  - hanno fatto bene i due compitini ma il primo peggio del secondo.

  In questi casi la votazione (in trentesimi) della prima parte farà media col voto del secondo compitino, e, se non inferiore a 18, ammetterà all'orale. Si considererà comunque la migliore fra la vecchia media dei compitini e la nuova media ottenuta con questa prova.

- Risolveranno soltanto gli esercizi della seconda parte gli studenti del primo anno che:

  - fatto male il secondo compitino e bene il primo;
  - hanno fatto bene i due compitini ma il secondo peggio del primo. In questi casi la votazione (in trentesimi) della seconda parte farà media col voto del primo compitino, e, se non inferiore a 18, ammetterà all'orale. Si considererà comunque la migliore fra la vecchia media dei compitini e la nuova media ottenuta con questa prova.

- Risolveranno gli esercizi sia della prima che della seconda parte gli studenti del primo anno che:

  - hanno fatto male entrambi i compitini;
  - hanno fatto bene i compitini ma vogliono migliorare la propria media.

  In questi casi la media dei voti (in trentesimi) relativi alle due parti, se non inferiore a 18, ammetterà all'orale. Si considererà comunque la migliore fra la vecchia media dei compitini e la nuova media ottenuta con questa prova.

- Gli studenti dgli anni successivi al primo hanno diritto a sostenere la sola prova orale. Se fanno questa prova scritta, per intero o (avendo fatto i compitini) solo in parte, potranno sostenere una prova orale più snella e solo teorica (senza esercizi), come quella degli studenti del primo anno.

Le prove orali degli studenti che sostengono questa prova devono essere sostenute entro la sessione di esami di gennaio-febbraio 2004. Chi non sostiene l'orale entro questo termine, dovrà ricominciare da capo con una nuova prova scritta nelle sessioni successive.

Soluzioni

Esercizio 1 Indichiamo con $(-u, -v)$ le coordinate di P (per il tema n.1 si ha $u = 5$, $v = 12$ e per il tema n.2 si ha $u = 13$, $v = 24$); similmente, indichiamo con $\pm p$ i coefficienti angolari delle due rette (per il tema n.1 si ha $p = 3$ e per il tema n.2 si ha $p = 2$). La prima condizione da imporre è che l'iperbole passi per P: quindi deve essere

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1.$$

Gli asintoti si trovano osservando che l'equazione dell'iperbole si scinde nelle due seguenti:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \qquad |x| \geq a.$$

Analizziamo la prima equazione, cioè quella col segno +, relativa al ramo superiore dell'iperbole. Per $x \to +\infty$ si ha, essendo $x = \sqrt{x^2}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{b}{a},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(y - \frac{b}{a}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0.$$

Analogamente, per $x \to -\infty$ si ha, essendo $x = -\sqrt{x^2}$,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{b}{a}\left(-\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}\right) = -\frac{b}{a},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(y + \frac{b}{a}x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - |x|\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + |x|} = 0.$$

Dunque il ramo superiore dell'iperbole ($y > 0$) ha per asintoti obliqui la retta $y = \frac{b}{a}x$ per $x \to +\infty$ e la retta $y = -\frac{b}{a}x$ per $x \to -\infty$.
Il ramo inferiore ($y < 0$), per motivi di simmetria rispetto all'asse x, avrà per asintoti obliqui la retta $y = -\frac{b}{a}x$ per $x \to +\infty$ e la retta $y = \frac{b}{a}x$ per $x \to -\infty$.
In definitiva, dobbiamo richiedere ai coefficienti a e b la condizione

$$\frac{b}{a} = p.$$

Dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{b}{a} = p, \end{cases}$$

ricordando che si richiede $a > 0$, $b > 0$.
Per il tema n.1 la soluzione è $a = 3$ e $b = 9$; per il tema n. 2 la soluzione è $a = 5$ e $b = 10$.

Esercizio 2 Per il tema n.1 si ha

$$n^2 \left(\sqrt{1+n^4} - \sqrt{5+n^\alpha}\right) = n^2 \frac{-4+n^4-n^\alpha}{\sqrt{1+n^4}+\sqrt{1+n^\alpha}}\,.$$

Se $\alpha < 4$ il limite è $+\infty$ in quanto la frazione si comporta come $n^{2+4-4/2}$, ossia come n^4. Se $\alpha = 4$ il denominatore va come $2n^2$ e il numeratore è $-4n^2$, per cui il limite è -2. Infine se $\alpha > 4$ l'intera frazione si comporta come $-n^{2+\alpha-\alpha/2}$ e quindi il limite è $-\infty$.
Per il tema n.2 invece si ha

$$n \left(\sqrt{1+n^2} - \sqrt{3+n^\alpha}\right) = n \frac{-2+n^2-n^\alpha}{\sqrt{1+n^2}+\sqrt{3+n^\alpha}}\,.$$

Se $\alpha < 2$ il limite è $+\infty$ in quanto la frazione si comporta come $n^{1+2-2/2}$, ossia come n^2. Se $\alpha = 2$ il denominatore va come $2n$ e il numeratore è $-2n$, per cui il limite è -1. Infine se $\alpha > 2$ l'intera frazione si comporta come $-n^{1+\alpha-\alpha/2}$ e quindi il limite è $-\infty$.

Esercizio 3 La funzione del tema n.2 si ottiene da quella del tema n.1 cambiando x con $-x$: quindi il suo comportamento è il simmetrico rispetto all'asse y di quello della funzione del tema n.1. Analizziamo quindi la funzione del tema n.1 e cioè

$$f(x) = e^{100x} \left| \frac{x^2}{100} - 1 \right|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} e^{100x} \left(\dfrac{x^2}{100} - 1 \right) & \text{se } |x| > 10, \\ e^{100x} \left(1 - \dfrac{x^2}{100} \right) & \text{se } x \in [-10, 10]. \end{cases}$$

La funzione è sempre non negativa ed è nulla per $x = \pm 10$: tali punti sono quindi punti di minimo assoluto, quindi anche relativo.
Cerchiamo i punti di massimo relativo. In $[-10, 10]$ si ha

$$f'(x) = e^{100x}\left(100 - x^2 - \frac{x}{50}\right);$$

quindi in tale intervallo si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se

$$-x^2 - \frac{x}{50} + 100 \geq 0$$

cioè se e solo se

$$\frac{-1-\sqrt{1000001}}{100} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{1000001}}{100}.$$

Poiché

$$\frac{-1-\sqrt{1000001}}{100} < -\frac{\sqrt{1000000}}{100} = -10,$$

$$0 < \frac{-1+\sqrt{1000001}}{100} = \frac{1000000}{100(1+\sqrt{1000001})} < \frac{1000000}{100 \cdot 1000} = 10,$$

la funzione ha un massimo relativo in $x_1 = \frac{-1+\sqrt{1000001}}{100}$.
In $[10, \infty[\cup]-\infty, -10]$ si ha

$$f'(x) = e^{100x}\left(x^2 - 100 + \frac{x}{50}\right);$$

quindi $f'(x) \geq 0$ se e solo se

$$x \leq \frac{-1-\sqrt{1000001}}{100} \quad \text{oppure} \quad x \geq \frac{-1+\sqrt{1000001}}{100};$$

essendo, come sappiamo,

$$\frac{-1-\sqrt{1000001}}{100} < -10, \quad 0 < \frac{-1+\sqrt{1000001}}{100} < 10,$$

il punto $x_2 = \frac{-1-\sqrt{1000001}}{100}$ è di massimo relativo.
Per la funzione del tema n.2 si avrà che i punti di minimo relativo sono ancora $x = \pm 10$, mentre i punti di massimo relativo sono

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{1000001}}{100}, \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{1000001}}{100}.$$

(ii) Si ha, per la funzione del tema n.1,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Per la funzione del tema n.2 si ha, analogamente,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

(iii) La funzione del tema n.1 ha l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to -\infty$. Poiché inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)x = +\infty,$$

essa non ha asintoto per $x \to +\infty$. Per la funzione n.2, simmetricamente, c'è l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$ e non c'è asintoto per $x \to -\infty$.

Esercizio 4 Calcoliamo l'integrale del tema n.1: con la sostituzione $t = \sqrt{x-1}$ si ha $x = 1 + t^2$, $dx = 2t\,dt$ e quindi

$$\begin{aligned}
\int_5^{10} \frac{1}{x - 2\sqrt{x-1}}\,dx &= \int_2^3 \frac{2t}{1+t^2-2t}\,dt = \int_2^3 \frac{2t}{(t-1)^2}\,dt = \\
&= \int_2^3 \frac{2t-2}{(t-1)^2}\,dt + \int_2^3 \frac{2}{(t-1)^2}\,dt = \\
&= \left[2\ln(t-1)^2 - \frac{2}{t-1}\right]_2^3 = 2\ln 4 - 1 + 2 = \\
&= 4\ln 2 + 1.
\end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale del tema n.2: con la sostituzione $t = e^x$ si ha $x = \ln t$, $dx = dt/t$ e quindi

$$\begin{aligned}
\int_{\ln 10}^{\ln 100} \frac{1}{e^x - 1}\,dx &= \int_{10}^{100} \frac{dt}{t(t-1)} = \int_{10}^{100} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) dt = \\
&= \left[\ln\frac{t-1}{t}\right]_{10}^{100} = \ln\frac{99}{100} - \ln\frac{9}{10} = \ln\frac{11}{10}\,.
\end{aligned}$$