Analisi Matematica I, Esercitazioni, Anno Accademico 2013 -2014, Ingegneria Gestionale
Tortorelli

LEGENDA

I principali testi e raccolte di esercizi a cui si fa riferimento in queste note sono:

[GGS] M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"

[GGE] M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"

[FM] A.Faedo, L.Modica, "Analisi I, lezioni"

[ABC] E.Acerbi, G. Buttazzo, "Analisi Matetmatica ABC 1: funzioni di una variabile"

Ogni gruppo di esercitzione è introdotto dagli esercizi pertinenti dei testi di esame degli anni passati, con i seguenti riferimenti:

AACnPNGMEm ovvero AAExnPNGMEm:

AA sono le ultime cifre dell'anno accademico,
C se si tratta di prove in itinere (compitini),
Ex se si tratta di testi di appelli,
P sta per 'parte dell'esame scritto',
E sta per esercizio,
n il numero del compitino o dell'appello,
N è il numero della parte dell'esame in questione(prima o seconda),
M è il numero del gruppo di versione del testo dello stesso esame
m il numero dell'esercizio.

Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

Il corpo dei gruppi di esercitazione è composto da testi quasi tutti manoscritti con numerazione delle pagine indipendente, oltre ai dattiloscritti dei testi d'esame di cui sopra.

Inoltre con:
$*$ si indicano gli esercizi più impegnativi,
$\circ$ quelli di approfondimento o estensione e quelli più teorici.

IX GRUPPO DI ESERCITAZIONE, IXT: complementi di ripasso sui numeri complessi.
Equazioni differenziali .

A] Complementi di ripasso su i numeri complessi.
B12-13] Equazioni lineari del primo ordine.
B14-15] Equazioni del primo ordine a variabili separabili e riducibili a lineari.
B16] Tecnica di sostistuzione per equazioni del primo ordine.
B17-18] Equazioni differenziali del secondo ordine come modelli di problemi.
C19-20] Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.
C21-22] Equazioni riducibili ad equazioni risolubili.

Teoria relativa nei testi indicati e svolta a lezione
Oltre agli esercizi di esame, a quelli qui proposti e a quelli segnalti a lezione si segnalano:
- "Test di Allenamento" in [GGE] pagg. 71- 74 come esercizi di base
- gli esercizi relativi al capitolo 6 in [ABC] pagg 286 - 287, e gli esempi svolti nel relativo capitolo.

Testi di esame del nono gruppo di esercitazioni: prime parti
Risolvere i seguenti esercizi senza dare dimostrazioni

13C2P1G1E7 Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = e^x \sin t$ che soddisfa $x(\pi) = 0$.

13Ex1P1G1E6 Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ la funzione $\dfrac{1}{1+at}$ risolve l'equazione differenziale $\dot{x} + 4x^2 = 0$.

13Ex2P1G1E7 Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = \dfrac{e^t}{2x}$ che soddisfa $x(0) = 2$.

13Ex2P1G2E7 Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = \dfrac{e^t}{3x^2}$ che soddisfa $x(0) = 2$.

13Ex2P13E7 Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = \dfrac{\cos t}{2x}$ che soddisfa $x(0) = 2$.

13Ex2P1G4E7 Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = \dfrac{\cos t}{3x^2}$ che soddisfa $x(0) = 2$.

13Ex3P1G1E7 Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + x\ \cos t = 0$ che soddisfa $x(0) = 2$.

13Ex3P1G2E7 Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + x\ \cos t = 0$ che soddisfa $x(0) = 4$.

13Ex3P1G3E7 Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + x\ \sin t = 0$ che soddisfa $x(0) = 4$.

13Ex3P1G4E7 Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + x\ \sin t = 0$ che soddisfa $x(0) = 2$.

13Ex4P1G1E7 Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = 2t(1 + x^2)$.

13Ex4P1G2E7 Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = 3t^2(1 + x^2)$.

13Ex4P1G3E7 Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = -2te^x$.

13Ex4P1G4E7 Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = -3t^2e^x$.

13Ex1P1G1E7 Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0$.

Testi di esame del nono gruppo di esercitazioni: seconde parti
Risolvere i seguenti esercizi motivando accuratamente le risposte.

13C2P2G1E2 a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 8t\,. \tag{1}$$

b) Trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$.
c) Trovare le soluzioni che soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$.

13Ex2P2G1E1 Dato $a \in \mathbf{R}$, si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + ax = 2e^{-2t}\,. \tag{2}$$

a) Trovare la soluzione generale per $a = 5$.
b) Dire per quali valori di a si ha che *ogni* soluzione soddisfa $x(t) = o(e^{-t})$ per $t \to +\infty$.

13Ex4P2G1E1 Dato $a \in \mathbf{R}$, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = e^{at}\,. \tag{3}$$

a) Trovare la soluzione generale per $a = 1$.
b) Trovare la soluzione generale per $a = -1$.
c) Trovare la soluzione generale per a qualunque.

A] ESERCIZI PER RIPASSARE I NUMERI COMPLESSI (non istituzionale).

Proposizione Se P è un polinomio con coefficienti complessi $P(z_0) = 0$ se e solo se $P(z) = Q(z)(z - z_0)$. Quindi il polinomio ha al più un numero di radici pari al suo grado.
Teorema fondamentale dell'algebra Ogni polinomio ha almeno una radice complessa.
Corollario Un polinomio ha un numero di radici, con molteplicità, pari al suo grado.
Se $z = a + ib$ con $\overline{z}$ si indica $a - ib$, e si dirà *coniugato* di z.
Osservazione Un polinomio con coefficienti reali ha radici complesse e coniugate.

ESERCIZIO n. 1 Si scrivano in forma cartesiana ($x + iy$ con x e y in $\mathbf{R}$):
$(\sqrt{2} + ie)(i - 23)$, $(-4 + 4i)^6$, $\frac{1}{i}$, $\frac{1+i}{((2+i)^2)}$, $1 + i + i^2 + i^4 + i^6$, $\frac{1}{x+iy}$, $\sqrt{2 + 2i}$.

ESERCIZIO n. 2 Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbf{C}$ delle equazioni: $z^2 + 1 = 0$, $z^6 + 1 = 0$, $z^4 + 1 = 0$, $z^2 + 2z + 1 = 0$, $z^2 + 4z + 5 = 0$, $z^2 + 2iz - 1 - i = 0$, $z^2 + z + 1 = 0$.

ESERCIZIO n. 3 Risolvere: $i\bar{z}^3 = |z|$, $z^2 + |z| + 1 = 0$, $2z^4 + 3z^2 = 0$, $z|z| = 2\mathcal{R}ez$, $\mathcal{I}mz^2 = 1$

ESERCIZIO n. 4 Si determino le regioni del piano definite dalle seguenti formule: $|z - i| = 2$, $|z-1| = |z-i|$, $|z-1| < |z-i|$, $*\ |z-1| + |z-i| = 2$, $*\ |z-1| + |z-i| = \sqrt{2}$, $\mathcal{R}ez = 2\mathcal{I}mz$.

ESERCIZIO n. 5 - Scrivere informa trigonometrica: 4, $7i$, $3 + 3i$, $\sqrt{3} - i$, $1 - i$.
- Scrivere in forma trigonometrica gli $z \in \mathbf{C}$ per cui: $z = \mathcal{R}ez > 0$ *o* $|\mathcal{R}ez| < \mathcal{I}mz$ *o* $|z| \leq 1$.

ESERCIZIO n. 6 Trovare le radici seste di -1, quadrate di $1 + i\sqrt{3}$ e cubiche di 1.

Notazione Se $z = x + iy \in \mathbf{C}$ si indica con e^z il numero $e^x(\cos y + i \sin y)$.

ESERCIZIO n. 7 Per ogni numero complesso $w \neq 0$ vi è un numero complesso z per cui $w = e^z$. Quante sono le soluzioni di $w = e^z$?

ESERCIZIO n. 8 Il prodotto di due numeri complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti. In altri termini: $e^z e^w = e^{z+w}$.

ESERCIZIO n. 9 a) Si verifichi che le radici n-sime di 1 sono $e_h = e^{i2\pi\frac{h}{n}} = (e_1)^h$, $0 \leq h < n$.
b) Fissati n ed m l'insieme dei $e^{i2\pi m\frac{h}{n}}$, $h \in \mathbf{Z}$ è contenuto in quello delle radici n-sime di 1. Coincide con esso se e solo se m ed n non hanno divisori comuni. In altri termini $\left(e^{i2\pi m\frac{1}{n}}\right)^h$, $0 \leq h < n$ sono le radici n-sime di 1 se e solo se m ed n sono primi fra loro.

*, ∘ ESERCIZIO n. 10 L'area del triangolo di veritci u, v, $w \in \mathbf{C}$ è data da $\frac{1}{2}\left|(w - v)\overline{(u - v)}\right|$.

*, ∘ ESERCIZIO n. 11 - Il prodotto scalare tra (x, y) e (u, v) è dato da $\mathcal{R}e\left((x + iy)\overline{(u + iv)}\right)$.
- Che operazione tra numeri complessi da il determinante della matrice di righe (x, y), (u, v)?

EQUAZIONI DIFFERENZIALI
B] EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

ESERCIZIO n. 12 Trovare l' eventuale soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$u' + 2u = 4t,\ u' + u = \cos t,\ u' + au = e^{mt},\ u' - u\sin t = \sin 2t\ ,\ \ u' + 2tu = te^{-t^2},$$

$$u' + \frac{1-2t}{t^2}u = 1\ (t > 0)\ ,\ \ u' - u = \frac{(1+t^2)e^t}{t}\ (t < 0)\ ,\ \ u' - \frac{2tu}{1+t^2} = 1 + t^2\ ,$$

$$u' + \frac{2}{t}u = \frac{\sin t}{t}\ (t \neq 0)\ ,\ \ {*tu'} + 2u = \cos t\ (t \in \mathbf{R})\ ,\ \ *\ tu' = 1\ ,$$

$$*\ u' + \frac{nu}{t+1} = e^t(t+1)^n\ (n \in \mathbf{N},\ t \neq -1)$$

ESERCIZIO n. 13 Si risolvano i seguenti problemi ai dati iniziali esplicitando il dominio della soluzione e il comportamento suo e della derivata agli estremi:

$$u' = 1\ \ u(1) = 4\ ,\ \ u' = xe^{x^2}\ \ u(-1) = 0\ ,\ \ u' = \log t\ \ u(0) = 3\ ,\ \ u' = e^{-x}\ \ \lim_{t\to+\infty} u(t) = 4$$

$$u' = u\ u(2) = 0,\ u' = u\log t\ u(1) = 1,\ u' + 3u = 4t\ u(0) = 3,\ u' + 2tu = 2te^{-t^2}\ \ u(0) = 1\ .$$

ESERCIZIO n. 14 Si risolvano i seguenti problemi ai dati iniziali esplicitando il dominio della soluzione e il comportamento suo e della derivata agli estremi. Si tracci un grafico approssimativo delle soluzioni basandosi preliminarmente, prima del calcolo esplicito della soluzione, anche sulle proprietà dedotte direttamente dall'equazione.

$$u' = u^2 + 1\ u(0) = c\ ,\ \ u' = u^2 - 1\ \ u(0) = c\ ,\ \ u' = 1 + u^3\ \ u(0) = c\ ,\ \ u' = \sin u\ \ u(0) = c,$$

$$u'u = 1\ \ u(1) = c,\ \ u' = 100^{t+u}\ u(0) = c,\ \ u' = \frac{1+u^2}{1+t^2}\ u(0) = c,\ \ u' = \frac{1-2t}{u^2}\ u(0) = c^2,$$

$$u' = u^2\cos t\ u(0) = c\ ,\ \ u' + \sqrt{\frac{1-u^2}{1-t^2}} = 0\ ,\ \ *\ tu' + u = u^2\ ,\ \ .$$

ESERCIZIO n. 15 Data la soluzione $u = u(t)$ di un'equazione differenziale $\frac{du}{dt} = u' = f(t,u)$ l'eventuale inversa $t = t(u)$ dovrebbe verificare l'equazione $\frac{dt}{du} = t' = \frac{1}{f(t,u)}$. Tracciare i grafici approssimativi delle soluzioni dei seguenti problemi riducendosi ad equazioni lineari:

$$u' = \frac{1}{2t-u}\ ,\ \ u(1) = 1\ ;\ \ u' = \frac{1}{2t-u^2}\ ,\ u(1) = -1\ ;\ \ u' = \frac{1}{t+e^u}\ ,\ \ u(0) = 3\ .$$

ESERCIZIO n. 16 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali per *sostituzione*:

$$u' = 3 + \cos(t-u)\ ,\ \ u' = \frac{u+t-1}{(t+u)^2+1}\ ,\ \ u' = \frac{6t + \frac{u}{t}}{2 - \log t}.$$

ESERCIZIO n. 17
a) Un massa puntiforme di grandezza m, in quiete all'istante iniziale t_0, si muove di moto rettilineo soggetta ad una forza proporzionale, per un fattore κ, all'incremento di tempo dall'istante iniziale, ed ad una forza di resistenza del mezzo porporzionale, per un fattore χ, alla velocità. Si espliciti la velocità in funzione del tempo e dei parametri.
b) Un corpo ad un instante t_0 ha temperatura pari a quella dell'ambiente circostante eguale a Θ_0. Il corpo viene riscaldato a tasso costante, pari a δ^2, e disperde calore nell'ambiente in modo proporzionale, per un fattore γ^2, alla differenza tra la sua temperatura e quella dell'ambiente considerata costante. Si espliciti la dipendenza dal tempo della temperatura del corpo.

---

* ESERCIZIO n.18 Trovare un grafico per cui la distanza dall'origine di ogni retta tangente ad un suo punto è uguale alla distanza dall'origine della retta normale nello stesso punto. [$y = ax + b$ ha distanza dall'origune $|b|/\sqrt{1+a^2}$]

C] EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

ESERCIZIO n.19 Trovare la soluzione dei problemi ai dati iniziali:
$u'' = u,\ u(1) = 1,\ u'(1) = 1;\ u'' - 3u' + 2u = 0,\ u(0) = 1,\ u'(0) = 0$;
$u'' - 2u' + u = 0,\ u(1) = 0,\ u'(1) = e$; $u'' + u' - 2u = 0\ u(0) = 1,\ u'(0) = 2;$
$u'' - 4u' + 3u = 0,\ u(0) = 6,\ u'(0) = 10$; $4u'' - 20u' + 25u = 25\ ,u(0) = 0,\ u'(0) = 0;$
$4u'' - 8u' + 20u = 0,\ u(0) = 0,\ u'0) = 1$; $u'' + 2u' + 2u = 0,\ u(0) = 0,\ u'(0) = 1$

ESERCIZIO n.20 Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni lineari a cofficienti costanti o la soluzione dei problemi con dati iniziali o al bordo:
$u'' - 3u' + 2u = t^2$; $u'' + 2u' + 10u = t^3 - 1$; $2u'' + u' - u = 2e^t$; $u'' + 2u' + 5u = \sin t$;
$u'' - 3u' + 2u = f(t)$ nei seguenti casi:
$f(t) = 10e^{-t},\ 3e^{2t},\ 2\sin t,\ 2t^3 - 30,\ 3t + 5\sin 2t,\ 2e^t - e^{-2t},\ \sinh t$;
$u'' + u = \dfrac{1}{\cos t};$
$u'' + u = \sin 2t,\ t \in [0;\pi],\ u(0) = u(\pi) = 0.$

ESERCIZIO n. 21 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine:
$$u'' = t + \sin t,\ u'' = \operatorname{artan}\ t,\ u'' = u' + t,\ u'' = \frac{u'}{t} + t,\ (u'')^2 = u',\ 2tu'u'' = (u')^2 + 1,$$
$$u'' = 2uu',\ u''u + (u')^2 = t,\ *\ u'' + \frac{u'}{t} - \frac{u}{t^2} = 0,\ u'' = \frac{u'(e^u - 1)}{t},\ u'' = u^{13},$$
$$*\ u'' = \frac{u}{1 + (u')^2}.$$

ESERCIZIO n. 22 Si trovino le soluzioni dei seguenti problemi ai dati iniziali:
$$u'' = \frac{2tu'}{1+t^2},\ u(0) = 1,\ u'(0) = 3;\ u'' = \frac{u'}{t} + \frac{t}{u'},\ u(1) = 1,\ u'(1) = 1;$$
$$u'' = tu' + u + 1,\ u(0) = 1\ ,u'(0) = 0.$$

ESERCIZIO n.23 Se $y \not\equiv 0$ è soluzione di: $u''(t) + u'(t)f(t) + u(t)g(t) = 0$, allora

$$z(t) = cy(t) \int^t \frac{e^{-\int^s f(\tau)d\tau}}{y^2(s)} ds$$

è soluzione della stessa.

---

* ESERCIZIO n.24 Si trovino le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$u'' - \tan t \cdot u' + 2u = 0, \; u'' - u' + \frac{u}{t} = 0.$$

---

* ESERCIZIO n.25 Si trovino tutte le soluzioni $(u; \lambda)$, ove le incognite sono: u funzione definita su $[0; \pi]$, e λ numero reale, dei problemi:

$u'' = \lambda \cdot u, \; u(0) = u(\pi) = 0; \;\; u'' = \lambda \cdot u, \; u(0) = u(\pi);$
$u'' = \lambda \cdot u, \; u(0) = u(\pi), \; u'(0) = u'(\pi); \; u'' = \lambda \cdot u, \; u(0) = u(\pi) = u'(0) = u'(\pi) = 0.$

Matematica e Statistica, Anno Accademico 2008-2009,
Scienze Ecologiche e della Biodiversità
RUDIMENTI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI: V.M. Tortorelli
27 novembre 2008

Equazioni di base

"Quadratura" semplice Se $f : A \to \mathbf{R}$ è continua su A segmento in $\mathbf{R}$, per il teorema fondamentale del calcolo la $t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) = f(t), & t \in A \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Variabili separabili Se $f : A \to \mathbf{R}$, $g : B \to \mathbf{R}$ sono funzioni continue su A e su B, segmenti in $\mathbf{R}$, si tratta di trovare le $y \in C^1(I)$, I segmento incluso in A, per cui $\boxed{y'(t) = f(t)g(y(t)),\ t \in I}$

- Se per $\overline{y} \in B$ si ha $g(\overline{y}) = 0$ allora la funzione costante $y(t) = \overline{y}$, $t \in A$ è soluzione.

Procedimento euristico
i- si cercano le soluzioni che non si annullano: dall'equazione deve essere $\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$
ii- si considera Γ primitiva di $\frac{1}{g}$ su $J \subset B$
iii- si considera F primitiva di f
iv- si scelgono $I \subset A$ e $c \in \mathbf{R}$ in modo che $c + F(I) \subset \Gamma(J)$
l'eventuale soluzione deve verificare l'equazione $\Gamma(y(t)) = F(t) + c$, $t \in I$

Il procedimento inverso Considerando quindi
i- un generico $]\alpha, \beta[= J \subset B$ in modo che g si annulli solo agli estremi di J,
ii-una generica Γ primitiva di $\frac{1}{g}$ su J (essendo g continua non cambia segno e Γ sarà invertibile su J)
iii-una generica primitiva F di f su A
iv- e determinando di conseguenza I e c t.c. $c + F(I) \subseteq \Gamma(J)$, l'intervallo di estremi $\Gamma(\alpha)$ e $\Gamma(\beta)$, si trova che

$$\boxed{y(t) = \Gamma^{-1}(F(t) + c),\ t \in I}$$

è una soluzione e inoltre $\alpha < y(t) < \beta$, $t \in I$.

Problema di Cauchy 1: Quindi se $g(y_0) \neq 0$ per determinare una soluzione locale al problema di Cauchy

$$\boxed{\begin{cases} y'(t) = f(t)g(y(t)), & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}}$$

- si prende J in modo che $y_0 \in J$ e g non si annulli se non agli estremi di J, $\Gamma(p) = \displaystyle\int_{y_0}^{p} \frac{du}{g(u)}$, $p \in J$
- $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)ds$, I per cui $t_0 \in I$ e $F(I) \subset \Gamma(J)$

La funzione $y(t) = \Gamma^{-1}(F(t) + c)$ è ben definita ed è soluzione, e tale y è a *valori in* J: $\alpha < y(t) < \beta$, per $t \in I$. Si ha l'esistenza locale per tale problema e il fatto che la soluzione è *unica finchè non annulla* g.

(*Problema di Cauchy 2:* Se $\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} \frac{dp}{|g(p)|} = \int_{\beta-\varepsilon}^{\beta} \frac{dp}{|g(p)|} = +\infty$ si ottiene che la soluzione trovata è globale e non può annullare g se non agli estremi di A: infatti se fosse $g(y(t_1)) = 0$ si avrebbe $y(t_1)$ eguale ad α o a β da cui $\int_{t_0}^{t} f(s)ds = \int_{y_0}^{y(t_1)} \frac{du}{g(u)} = \pm\infty$. Ma f ha integrale finito sugli intervalli limitati e chiusi contenuti in A essendo continua.

Problema di Cauchy 3: Analogamente se y_0 è uno *zero isolato* di g e $\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0} \frac{dp}{|g(p)|} = \int_{y_0}^{y_0+\varepsilon} \frac{dp}{|g(p)|} = +\infty$ si ha che la funzione costantemente eguale a y_0 è *l'unica soluzione* del problema di Cauchy.)

Equazioni lineari del primo ordine $y'(t) - a(t)y(t) = f(t)$ con f e a funzioni continue su un intervallo I.
Omogenea $u'(t) = a(t)u(t)$: se $\alpha' = a$ lo *spazio vettoriale delle soluzioni* è dato da $u(t) = ce^{\alpha(t)}$.
Soluzioni Moltiplicando per $e^{-\alpha(t)}$ ci si riduce alla ricerca di primitive di $e^{-\alpha(t)}y(t)$ e le soluzioni sono date

$$\boxed{y(t) = ce^{\alpha(t)} + \int^{t} e^{\alpha(t)-\alpha(s)} f(s)ds = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t}^{s} a(x)dx} f(s)ds}$$

si noti che tutte le soluzioni dell'equazione completa si ottengono da una particolare soluzione (il secondo addendo) sommando una soluzione dell'omogenea.

Equazioni del secondo ordine

Teorema 1 Si consideri l'equazione lineare nell'incognita $y(t)$: $a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$, con coefficienti e termine noto funzioni continue su un intervallo I con $a(t) \neq 0$ e valori in $\mathbf{R}$ [risp. $\mathbf{C}$].
1- L'insieme delle soluzioni dell'equazione con termine noto nullo (equazionee omogenea associata) è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ [risp. su $\mathbf{C}$]di dimensione 2 ovvero trovate due soluzoni dell'omogenea linearmente indipendenti $u_1(t)$ e $u_2(t)$ ogni altra soluzione è del tipo $c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ con c_1, c_2 costanti reali [risp. complesse].
2- Vi è almeno una soluzione dell'equazione $u^*(t)$.
3- Tutte le altre soluzioni dell'equazione sono del tipo $u^*(t) + c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$.

Approccio generale per risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$

1- si determina una base delle soluzioni dell'omogena $(u_1(t), u_2(t))$
2- si trova una soluzione particolare $u^*(t)$
3- si cercano c_1, c_2 per cui $c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + u^*(t)$ verifichi le condizioni iniziali del problema.

Passo 1 nel caso di coefficienti costanti
Il caso elementare per trovare soluzioni è quello in cui i coeffcienti sono funzioni costanti.
Teorema 2. Si consideri l'equazione lineare omogenea nell'incognita $u(t)$: $au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0$, con coefficienti costanti reali. Si ha che tutte e sole le soluzioni sono:

$$u(t) = \begin{cases} c_1e^{t\alpha}\cos\beta t + c_2e^{t\alpha}\sin\beta t & b^2 - 4ac < 0 \\ c_1e^{t\alpha} + c_2te^{t\alpha} & b^2 - 4ac = 0 \\ c_1e^{t\alpha_1} + c_2e^{t\alpha_2} & b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$, con $\alpha \pm i\beta$, ovvero α_1, α_2, α radici di $ax^2 + bx + c = 0$.
Volendo enunciare nel caso complesso il teorema si ha che tutte e sole le soluzioni (questa volta a valori in $\mathbf{C}$) al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$, con $\alpha \pm i\beta$, ovvero α_1, α_2, α radici di $ax^2 + bx + c = 0$. sono del tipo:

$$u(t) = \begin{cases} \gamma_1e^{\alpha_1 t} + \gamma_2e^{\alpha_2 t} & b^2 - 4ac \neq 0 \\ \gamma_1e^{\alpha t} + \gamma_2te^{\alpha t} & b^2 - 4ac = 0 \end{cases}$$

al variare di γ_1 e γ_2 in $\mathbf{C}$, con α_1, α_2, α radici complesse di $ax^2 + bx + c = 0$.
Quindi se a , b, c sono reali si riottiene l'enunciato precedente osservando che per definizione di forma esponenziale di un numero complesso:

$$e^{it} + e^{-it} = 2\cos t,\ ie^{-it} - ie^{it} = 2\sin t$$

Passo 2: principali metodi per la determinazione di una soluzione particolare
Per tentativi
Coefficienti indeterminati per equazioni a coefficienti costanti
Se il termine noto è $e^{\alpha t}(p_1(t)\cos\beta t + p_2(t)\sin\beta t)$, con p_1 e p_2 polinomi reali, si cerca una soluzione soluzioni del tipo:

$$u^*(t) = t^m e^{t\alpha}(q_1(t)\cos\beta t + q_2(t)\sin\beta t)$$

ove q_1 e q_2 sono polinomi con gradi minori del massimo di quelli di p_1 e p_2, ed m molteplicità di $\alpha \pm i\beta$, come radici del polinomio associato all'equazione.
Tale metodo è piè semplice da enunciarsi, e da usare, nel caso complesso:
se il termine noto è $p(t)e^{\lambda t}$, con p polinomio, si cerca una soluzione soluzioni del tipo:

$$u^*(t) = t^m\tilde{q}(t)e^{\lambda t}$$

ove $\tilde{q}$ è un polinomio con grado minore eguale a quello di $p(t)$, ed m è la molteplicità di λ come radice del polinomio associato all'equazione: $az^2 + bz + c$.
Variazione delle costanti Se $u_1(t)$, $u_2(t)$ danno una base dello spazio delle soluzioni dell'omogenea, si cercheranno soluzioni del tipo $u^*(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t)$

- ci si riduce al sistema numerico (t è fisso) $\begin{cases} u_1c_1' + u_2c_2' = 0 \\ u_1'c_1' + u_2'c_2' = \frac{f}{a} \end{cases}$ e quindi si trovano le primitive di c_1', c_2'.

$u^* = \underline{c_1 u_1} + \underbrace{c_2 u_2}$

$u^{*\prime} = c_1' u_1 + \underline{c_1 u_1'} + c_2' u_2 + \underline{c_2 u_2'}$

$u^{*\prime\prime} = c_1'' u_1 + c_1' u_1' + c_1' u_1' + \underline{c_1 u_1''} + c_2'' u_2 + c_2' u_2' + c_2' u_2' + \underbrace{c_2 u_2''}$

$(c_1' u_1 + c_2' u_2)'$