**Analisi Matematica I, Esercitazioni, Anno Accademico 2013 -2014, Ingegneria Gestionale**
Tortorelli

---

LEGENDA

I principali testi e raccolte di esercizi a cui si fa riferimento in queste note sono:

[GGS] M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"

[GGE] M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"

[FM ] A.Faedo, L.Modica, "Analisi I, lezioni"

[ABC] E.Acerbi, G. Buttazzo, "Analisi Matetmatica ABC 1: funzioni di una variabile"

Ogni gruppo di esercitzione è introdotto dagli esercizi pertinenti dei testi di esame degli anni passati, con i seguenti riferimenti:

AACnPNGMEm ovvero AAExnPNGMEm:

AA sono le ultime cifre dell'anno accademico,
C se si tratta di prove in itinere (compitini),
Ex se si tratta di testi di appelli,
P sta per 'parte dell'esame scritto',
E sta per esercizio,
n il numero del compitino o dell'appello,
N è il numero della parte dell'esame in questione(prima o seconda),
M è il numero del gruppo di versione del testo dello stesso esame
m il numero dell'esercizio.

Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

Il corpo dei gruppi di esercitazione è composto da testi quasi tutti manoscritti con numerazione delle pagine indipendente, oltre ai dattiloscritti dei testi d'esame di cui sopra.

Inoltre con:
$*$ si indicano gli esercizi più impegnativi,
$\circ$ quelli di approfondimento o estensione e quelli più teorici.

---

---

VIII GRUPPO DI ESERCITAZIONE, VIIIT: serie e somme infinite.

Manoscritto: A.1] esercizi sul comportamento infinitesimo degli addendi di una serie e sui criteri di confronto asintotico e confronto con integrali,
A.2] esercizi sui criteri del rapporto e della radice,
A.3], B] esercizi più impegnativi e di approfondimento.

Teoria relativa nei testi indicati e svolta a lezione

---

Testi di esame del ottavo gruppo di esercitazioni: prime parti
Risolvere i seguenti esercizi senza dare dimostrazioni

13C2P1G1E6 Dire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + n^{-a})$ converge ad un numero finito.

13Ex2P1G1E6 Dire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^a}{1 + n^{3a}}$ è finita.

13Ex2P1G2E6 Dire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log n)^a}{n^2}$ è finita.

13Ex2P1G3E6 Dire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a}{e^n}$ è finita.

13Ex2P1G4E6 Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n^a \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$ è finita.

13Ex3P1G1E6 Dire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n - n^2}{1 + n^a}$ risulta essere finita.

13Ex3P1G2E6 Dire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + \sin n}{4 + n^{2a}}$ risulta essere finita.

13Ex3P1G3E6 Dire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + \log n}{4 + n^{2a}}$ risulta essere finita.

13Ex3P1G4E6 Dire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n - n^3}{1 + n^a}$ risulta essere finita.

13Ex4P1G1E6 Calcolare il valore della serie $\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n}$.

13Ex4P1G2E6 Calcolare il valore della serie $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$.

13Ex4P1G3E6 Calcolare il valore della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

13Ex4P1G4E6 Calcolare il valore della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

---

Testi di esame del ottavo gruppo di esercitazioni: seconde parti
Risolvere i seguenti esercizi motivando accuratamente le risposte.

13C2P2G1E2 Dire per quali $a > 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a - n\sin(1/n)}{n^a}$$

converge ad un numero finito (fare attenzione al caso $a = 1$).

13Ex1P2G1E3 Dato $a > 0$ si consideri la serie a termini positivi

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\log n)^{-(\log n)^a}.$$

a) Dire se questa serie converge a un numero finito o meno per $a = 1$.
b) Dire per quali $a$ la serie converge a un numero finito.
[Suggerimento: riscrivere il termine della serie nella forma $n^{b_n}$ con $b_n$ opportuno].

13Ex4P2G1E3 Dire per quali numeri reali $a$ la seguente serie a termini positivi è finita:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [(n^2+1)^a - n^{2a}].$$

[Suggerimento: raccogliere $n^{2a}$].

---

* Argomenti impegnativi O Domande di approfondimento

A] 1. Si studi la convergenza delle serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\tan\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{0}^{\infty} \frac{n^3+10n}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}-1}}{\sqrt{n}\,(4^{\sqrt{n}}-1)}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n!}+3)}{\log n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)!-(2n)!}, \quad * \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{1-\frac{1}{n^2}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right\}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}, \quad * \sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\log n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1} t^2 e^{-t^2}\,dt$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{14+n}{2n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{3n+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{2^n\cdot n+5^n}, \quad * \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{5}-1\right), \quad * \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n^2]{n}-1\right)$$

$$* \sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{4n}\frac{dt}{t^2+1}, \quad * \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\right)$$

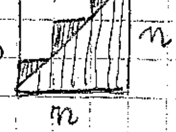
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(n^2)}}{n^n}, \quad * \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^{\log n}}.$$

2. Si studi la convergenza: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3n)!}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\, n!}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\, n!}{(2n)!}, \quad * \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(k+1)\cdots(k+n)}.$$

3.* a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum^{n}\log k}{n\log n}$ * b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

B] 4.° Quanto vale fissato $N \in \mathbb{N}$ ; $1+2+3+\dots+N = \sum_{n=1}^{N} n$ ?




5.° Calcolare le seguenti "somme":

a) $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{10^{2n}}$ b) $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} n$ c) $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+N)^2}$.

d) $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{n+N}}$. * e) $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{N^2+n}}$.

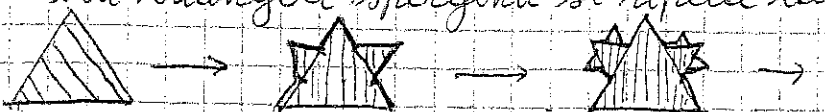
6.° a) Si provi che $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+N}$ è decrescente.

b) $\frac{1}{2} \leq \lim_{N\to\infty} S_N \leq 1$

7.° Calcolare: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $\left[ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right]$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

*c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ *d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$

8.°* a) Si consideri un triangolo equilatero di lato $l$.
Si attui la seguente procedura iterativa:
- sul terzo centrale di un lato obliquo si ponga il triangolo equilatero riscalato di un fattore $\frac{1}{3}$
- sui triangoli sporgenti si ripeta la procedura



Che area avrà la figura limite? Che perimetro?

b) Si consideri un quadrato di lato $l$. Diviso in 9 quadrati ottenuti riscalandolo di un fattore $\frac{1}{3}$ si consideri quello centrale. Per ognuno degli 8 quadrati rimasti si rifaccia la scelta, e così via. Che area si ottiene al limite?