Analisi Matematica I, Esercitazioni, Anno Accademico 2013 -2014, Ingegneria Gestionale
Tortorelli

LEGENDA

I principali testi e raccolte di esercizi a cui si fa riferimento in queste note sono:

[GGS]	M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"
[GGE]	M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"
[FM]	A.Faedo, L.Modica, "Analisi I, lezioni"
[ABC]	E.Acerbi, G. Buttazzo, "Analisi Matetmatica ABC 1: funzioni di una variabile"

Ogni gruppo di esercitzione è introdotto dagli esercizi pertinenti dei testi di esame degli anni passati, con i seguenti riferimenti:

AACnPNGMEm ovvero AAExnPNGMEm:

AA sono le ultime cifre dell'anno accademico,
C se si tratta di prove in itinere (compitini),
Ex se si tratta di testi di appelli,
P sta per 'parte dell'esame scritto',
E sta per esercizio,
n il numero del compitino o dell'appello,
N è il numero della parte dell'esame in questione(prima o seconda),
M è il numero del gruppo di versione del testo dello stesso esame
m il numero dell'esercizio.

Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

Il corpo dei gruppi di esercitazione è composto da testi quasi tutti manoscritti con numerazione delle pagine indipendente, oltre ai dattiloscritti dei testi d'esame di cui sopra.

Inoltre con:
$*$ si indicano gli esercizi più impegnativi,
$\circ$ quelli di approfondimento o estensione è quelli più teorici.

III GRUPPO DI ESERCITAZIONE, IIIT: esercizi sui limiti, confronto di infiniti, uso delle derivate per determinare massimi e minimi, diseguaglianze, iniettività.

Dattiloscritto pag.4: esercizi sullo studio di diseguaglianze grazie alle derivate.
Manoscritto: pag.1IIIT * confronto di infiniti con il fattoriale.
pagg. 2IIIT-3IIIT confronto di somme di infiniti e infinitesimi, limiti, studi grafici, uso delle derivate e studio di diseguaglianze, complementi su segno della derivata e monotonia.
pag, 4IIIT Risoluzione dell'esercizio 2 (4.29 [ABC]).
Teoria relativa nei testi indicati e svolta a lezione

Testi di esame del terzo gruppo di esercitazioni: prime parti
Risolvere i seguenti esercizi senza dare dimostrazioni

13Cprova1P1E3 Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:
a) x^2e^{-x}; b) $\arctan(1/x)$; c) $\log\left(\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}\right)$.

13Cprova1P1E4 Trovare i valori massimi e minimi di $(x^2-3)e^x$ per $0 \le x \le 2$.

13C1provaP1E6 Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(\dfrac{1}{1-x^3}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \arctan\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$;
c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+\sin x}{e^x}$.

13C1provaP1E7 Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x + \sin x - (\sin x)^2}{x + x^3 - x^2}$.

13C1P1G1E3 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log((2x)^x)$; b) $\tan(1-2x)$;
c) $\dfrac{x}{1-x^2}$.

13C1P1G1E4 Trovare il valore massimo e minimo di $\exp(x^3-3x)$ nell'intervallo $-2 \le x \le 3$.

13C1P1G1E5 Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log(\sin x)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-3^x}{(2^x-1)^2}$.

13C1P1G1E6 Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{\sqrt[3]{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+2x^4)}{x^3}$;
c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-\sin x}{2^x}$.

13C1P1G2E4 Trovare il valore massimo e minimo di $\exp(x^3-3x)$ nell'intervallo $0 \le x \le \frac{3}{2}$.

13C1P1G2E5 Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-5^x}{(2^x+1)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \log(\cos x)$.

13C1P1G2E6 Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log x}{\sqrt[4]{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1-2x^4)}{x^4}$;
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sin x}{3^x}$.

13C1P1G3E4 Trovare il valore massimo e minimo di $\exp(x^3-3x)$ nell'intervallo $-\frac{3}{2} \le x \le 0$.

13C1P1G3E5 Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \log(1+e^x)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+3^x}{(2^x+1)^2}$.

13C1P1G3E6 Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{\sqrt[4]{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(2-x^4)}{x}$;
c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+\sin x}{4x}$.

13C2P1G1E1 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2\exp(1-x)$; b) $\sqrt{1+x^2}$.

13C2P1G1E2 Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3\sin(2x)}{\log(1+x^4)}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log^2 x}{\sqrt{x}}$;
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(-x+\sin x)$.

13Ex1P1G1E2 Trovare i *valori* di minimo e di massimo di $\log(5-x^2)$ relativamente all'intervallo $[-1,2]$.

13Ex1P1G1E3 Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-1}{4^x+1}$; b) $\lim_{x\to 0^+} x\log(2x)$; c) $\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{\sin(2x^2)}$.

13Ex2P1G1E2 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) x^2e^{-x}; b) $\log\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$.

13Ex2P1G1E3 Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to-\infty}\cos(2^x)$; b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^{10}}$;
c) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{\log(1-x^2)}$.

13Ex2P1G2E3 Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 0^+} x^2\log x$; b) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\log(1-2x^3)}$;
c) $\lim_{x\to+\infty}\cos(x^{-3})$.

13Ex2P1G3E3 Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^3)}{3x^3}$; b) $\lim_{x\to-\infty}\exp(2^x)$;
c) $\lim_{x\to-\infty} x^{10}2^x$.

13Ex2P1G4E3 Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^3)}{3x^2}$; b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}}{\log x}$;
c) $\lim_{x\to+\infty}\exp(2^x)$.

13Ex3P1G1E2 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\cos(1-x^2)$; b) $4^{2x}/2^{3x}$.

13Ex3P1G1E3 Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 2^-}\frac{e^x}{x^2-4}$; b) $\lim_{x\to-\infty} x^{10}\,2^x$; c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\sqrt{1+4x^6}}$.

13Ex3P1G2E2 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\exp(1+x^2)$; b) $2^{6x}/4^{2x}$.

13Ex3P1G2E3 Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt[5]{x}\,\log x$; b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{\sqrt{4+x^6}}$; c) $\lim_{x\to 2^+}\frac{e^x}{x^2-4}$.

13Ex3P1G3E2 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(x^3-1)$; b) $3^{5x}/9^{2x}$.

13Ex3P1G3E3 Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+9x^6}}{x^3}$; b) $\lim_{x\to 1^+}\frac{e^x}{x^2-1}$; c) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt[6]{x}\,\log x$.

13Ex3P1G4E2 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(x^2-1)$; b) $9^{3x}/3^{4x}$.

13Ex3P1G4E3 Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2x^2+9x^6}}{x^3}$; b) $\lim_{x\to-\infty} x^5\,4^x$; c) $\lim_{x\to 1^-}\frac{e^x}{x^2-1}$.

13Ex4P1G1E2 Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x^2}$; b) $\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{2}{x^2+1}\right)$; c) $\lim_{x\to-\infty} xe^x$.

13Ex4P1G2E2 Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty}\cos(x^2+1)$; b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^2}$; c) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{\log(1+x^4)}$.

13Ex4P1G3E2 Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+e^x}{x^2+1}$; b) $\lim_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{2}{x^2+1}\right)$; c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{4x^2}$.

13Ex4P1G4E2 Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\log x}$; b) $\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x^2)-1}{2x^2}$; c) $\lim_{x\to+\infty} e^{(1-x^2)}$.

Testi di esame del terzo gruppo di esercitazioni: seconde parti
Risolvere i seguenti esercizi motivando accuratamente le risposte.

13C1provaP2E2 a) Dato $\lambda > 0$ si determini sulla semiretta positiva delle ascisse l'intervallo di concavità $[0, p(\lambda)]$ della funzione

$$y = f_\lambda(x) = \sqrt{\lambda}e^{-x^2\lambda}.$$

b) Calcolare l'area del triangolo rettangolo di altezza il segmento verticale da $(p, 0)$ a $(p, \sqrt{\lambda}e^{-p^2\lambda})$ e ipotenusa il segmento della retta tangente al grafico in $(p, \sqrt{\lambda}e^{-p^2\lambda})$ tra questo punto e l'asse orizzontale.

13C1P2G1E2 a) Dire se è vero o meno che $x^3 \geq 15 \log x - 3$ per ogni $x > 0$.
b) Determinare i numeri reali a tali che $x^3 \geq 15 \log x + a$ per ogni $x > 0$.

13C1P2G1E3 Si consideri la funzione $f(x) := x^5 e^{-x}$,
e per ogni $a > 0$ sia T_a il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle y, la retta passante per l'origine e per il punto $(a, f(a))$, la retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$.
a) Tracciare un disegno approssimativo di $f(x)$ per $x \geq 0$ e disegnare T_a per un a a vostra scelta.
b) Calcolare l'area di T_a.
c) Trovare il valore massimo e minimo di quest'area.

13Ex1P2G1E1 a) Dire se la disequazione $x^4 + 28 \geq 4x^3$ è soddisfatta per ogni $x \in \mathbf{R}$ oppure no.
b) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ la disequazione $x^4 + a \geq 4x^3$ è soddisfatta per ogni $x \in \mathbf{R}$.

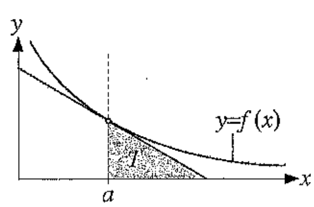
13Ex1P2G1E2ab a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \sqrt{x^6 + 1}$.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $x \geq 0$ e $x^3 \leq y \leq f(x)$.

13Ex2P2G1E3 Dato $a > 0$, consideriamo la funzione $f(x) := (x^2 + a)^3$.
a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è convessa su tutto $\mathbf{R}$.
b) Trovare il valore di a e di x_0 per cui il grafico della funzione $f(x)$ è tangente alla retta di equazione $y = \frac{27}{4}x$ nel punto di ascissa x_0.
c) Trovare i valori di a per cui $f(x) \geq \frac{27}{4}x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

13Ex3P2G1E2ab a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \exp(x^3 - 3x)$.
b) Risolvere la disequazione $f(x) \leq e^{6x}$ e disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che

$$f(x) \leq y \leq e^{6x}.$$

13Ex3P2G1E3 Sia f una funzione definita su $(0, +\infty)$, derivabile, positiva e tale che $f'(x) < 0$ per ogni x. Fissato $a > 0$, sia T il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle x, la retta verticale passante per il punto $(a, 0)$, e la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a (vedere la figura accanto).



a) Calcolare l'area di T.
b) Determinare le funzioni f per cui l'area di T vale 1 per ogni scelta di $a > 0$.

ESERCIZIO 1 Per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ si ha $e^x \geq \sin(\lambda x)$ per ogni $x \geq 0$?

ESERCIZIO 2 * [ABC 4.29] Per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ si ha $\lambda e^x \geq 1 + x \log x$ per ogni $x > 0$?
[Soluzione nel manoscritto pag.4IIIT]

ESERCIZIO 3 [ABC 4.31] Per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ si ha $\lim_{x \to +\infty} e^{(\lambda x)} - x^\lambda > 0$?

ESERCIZIO 4 Provare che se $x > 0$ allora $x > \dfrac{\tan x}{1 + (\tan x)^2}$.

ESERCIZIO 5 Provare che se $x > 1$ allora $x^2 \exp \dfrac{1}{x} > 1$.

ESERCIZIO 6 Provare che

$\forall x > -1 \quad x \geq \log(1 + x)$.

$\forall x \geq 0 \qquad \log(1 + x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$

ESERCIZIO 7[ABC 4.28] Provare che se $x > 0$ allora $x - 1 \geq \log x \geq \dfrac{x - 1}{x}$.

Analisi Matematica I per Ing. Gestionale 2013-2014

Terzo gruppo di esercitazioni V. M. Tortorelli: III T

* Argomenti impegnativi. ○ Domande di approfondimento o teoriche

- [ABC] esercizi 2.7 a), b), c), 2.11, 2.23, 2.26, 2.27, 2.29,
  2.30, 2.36, 2.37, 2.38,
  3.3, 3.4, 3.7, 3.8, 3.11-3.20, 3.21, 3.10, 3.24,
  3.25, 3.30 - 3.35, 3.36 a, b, c, d, e,
  4.8, 4.9 - 4.21, 4.20, 4.22 - 4.25, 4.28 - 4.35,
  4.46 - 4.56
- [GGS] pagg 22, 23 tranne le serie, 25, 27, 28, 29 primi tre,
  32 i primi tre, il nono, il decimo, l'undicesimo,
  76 secondo punto, 77 tranne l'ultimo punto,
  81, 82, 83 primo punto, 84 secondo punto,
  85 primo punto, 86 primo punto tranne l'ultima,
  87 primo punto, 88 primo punto, 89 primo punto
  90 primo punto, 91 primo punto.

*
- Quante soluzioni ha l'equazione $\arccos(x^3+3^\lambda)=\lambda$ al variare di $\lambda\in\mathbb{R}$?
- Mostrare che $2x^3-3x+\frac{1}{2}=0$ ha tre soluzioni e calcolarle con un errore minore di 0,25

---

*
- Posto $n!=n(n-1)!=n(n-1)(n-2)\cdots 1$, il prodotto dei primi n numeri, $0!=1$ si calcolino i limiti per $n\to\infty$

* $\frac{n^k}{k^n}$, $\frac{n!}{n^k}$, $\frac{n!}{k^n}$, $\frac{n!}{n^n}$.

- Calcolare se esistono i limiti per $n \to \infty$:

$$\frac{10^3 n - n^3}{n^{3/2} - 33 n^{1/2}}, \quad \frac{2^n + 4^n}{3^n + n!}, \quad \frac{\cos n\pi - \sqrt{n}}{n-1}, \quad * \sqrt[3n]{8^n - 10^n}$$

- Calcolare se esistono i seguenti limiti

$$\frac{3x + 2x^2 + x^3}{x^4 + x^2 - 10x} \quad x \to +\infty, \quad \frac{3x + 2x^2 + x^3}{x^4 + x^2 - 10x} \quad x \to 0, \quad * \frac{x + e^{\frac{1}{\sin x}}}{\sin x + x^2} \quad x \to 0$$

$$\frac{e^x + \sin\frac{1}{x}}{e^{2x-1} - 10e^x} \quad x \to +\infty, \quad \frac{x - x^2}{\sin x + (1 - \cos x)} \quad x \to 0, \quad \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad x \to +\infty$$

$$x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \quad x \to +\infty, \quad \sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x} \quad x \to +\infty, \quad * \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-2}}{\sqrt{3n+6} - \sqrt{3n+7}} \quad n \to +\infty$$

$$\cos\frac{n\pi - \sin\frac{1}{n^2}}{n + \sin n}, \quad \tan\sqrt{\frac{\cos n\pi + 2}{n \cos\frac{1}{n}}} \quad n \to \infty, \quad \frac{x \sin(e^{x^2}) - 3x^3}{e^x + x^3} \quad x \to -\infty$$

- Se $h : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ e $\begin{cases} h'(x) \geq 0 & \text{per } x > x_0 \\ h'(x) \leq 0 & \text{per } x < x_0 \end{cases}$

allora x_0 è punto di minimo

- Se $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $\begin{cases} f'(x) \geq g'(x) & x > x_0 \\ f'(x) \leq g'(x) & x < x_0 \end{cases}$

e $f(x_0) \geq g(x_0)$ allora $f(x) \geq g(x)$ $x \in (a,b)$.

* Se $a \geq -1$ allora $\forall n \in \mathbb{N}$ $(1+a)^n \geq 1 + na$

* Si trovi il numero delle soluzioni di $\log\left(1 + \sin\frac{x^2}{1+x^2}\right) = x$.

- Si trovi il " " di $\frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} = \lambda$, al variare di λ.

- Si " " " " $\frac{x-1}{1+|x|} = x + \lambda$ "

- Si disegni il grafico di $y = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

- Trovar i valori di massimo e minimo di $x^3 - 3x^2 + 1$ per $-2 \le x \le 3$.
- Si trovi, se esiste, il valore di massimo di $2 - \left|\frac{3}{1+x^2} - 1\right|$

---

*
- Per quali $\alpha, \beta > 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è continua? Per quali è derivabile?

- Se $f(x) = \begin{cases} x^2 (\sin \frac{1}{x}) + x & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $\quad 0 < x < 1$

Si calcoli $f'(0)$ usando la definizione.
Si calcoli $f'(x)$. La funzione è monotona in
* qualche piccolo intervallo del tipo $[0, a]$?

- Si provi che $\log b \le b - 1$, $\forall b > 0$,
- Si provi che per $\alpha > 0$ $\forall t > \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ $t^\alpha > \lg t + \frac{1}{\alpha} \lg \alpha$.
* - Si provi che $\forall \gamma > 0$ $x^\gamma \lg x \to 0$, $x \to 0^+$
- Si provi che $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e$, $x \to +\infty$

- a) Si provi che $f(x) = e^x + x^3 + 1$ è iniettiva.
  b) Si calcoli il valore $(f^{-1})'\left(\frac{1}{e}\right)$ [f^{-1} è l'inversa di f].
* Si studi il grafico di $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$
- La funzione $\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ assume massimo? assume minimo?
- Quante sono le soluzioni $\frac{x^2+1}{x^4+1} = \lambda$, al variare di λ?
* Al variar di $\lambda \le 1$ trovar il numero di soluzioni $x \ge 0$ di

$$e^{-x} = -\lambda x + \frac{2}{e}$$

Risoluzione [ABC 4.29]

Per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda e^x \geq 1 + x \lg x \quad \forall x > 0$?

- poichè $1 + x\lg x$ per $x \to 0^+$ tende a 1, fissato ε per x abbastanza vicino a 0 $\quad 1 + x \log x > 1 - \varepsilon$

Ora λe^x per $x = 0$ è λ, e se $\lambda < 1$ per x abbastanza vicino a 0 $\quad \lambda e^x < 1 - \varepsilon$.

Quindi se $\lambda < 1$ per x vicino a 0 la diseguaglianza è falsa

- Per $\lambda \geq 1$

$\lambda e^x \geq e^x \qquad e^0 = 1 = \lim_{x \to 0^+} 1 + x \lg x$

poichè $(1 + x\lg x)' = \lg x + 1 \to -\infty$ vicino a zero $1 + x\lg x$ decresce

quindi vicino a 0 $\quad e^x \geq 1 + x \lg x$

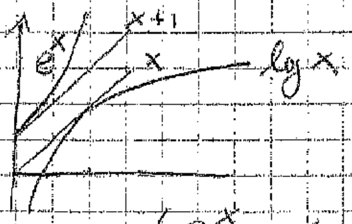
D'altronde

$(e^x)' = e^x \geq (1 + x\lg x)' = \lg x + 1 \quad \forall x > 0$

ma

$$e^x \geq \overbrace{x + 1}^{\text{retta tangente per } x=0 \text{ a } e^x} \geq \overbrace{x}^{\text{retta tangente per } x=1 \text{ a } (\log x)+1} \geq \lg x + 1 \quad \forall x$$

convessità e^x $\qquad$ concavità $\log x + 1$



Quindi per x vicino a 0

$e^x - 1 - x \lg x \geq 0$

ma $(e^x - 1 - x\lg x)' = e^x - \lg x - 1 \geq 0 \quad \forall x$

quindi $e^x - 1 - x \lg x$ è crescente e quindi sempre positiva

III T pag 4