Analisi Matematica I per Ing. Gestionale 2012-2013

Secondo gruppo di esercitazioni V. M. Tortorelli : II T

- Disegnare i grafici delle seguenti funzioni sui domini naturali

$$f(x) = \sin(\arcsin x), \quad f(x) = \cos(\arccos x), \quad f(x) = \cos(\arcsin x)$$
$$f(x) = \arcsin(\sin x), \quad f(x) = \arccos(\cos x)$$
$$f(x) = \arcsin(\cos x), \quad f(x) = \arccos(\sin x)$$

[Sugg. : $\arcsin(\sin x) = x$ solo se $|x| \le \frac{\pi}{2}$; si tratta di trovar $|R| \le \frac{\pi}{2}$: $\sin x = \sin R$]

- $\frac{1}{n} \to 0, \; n \to +\infty$

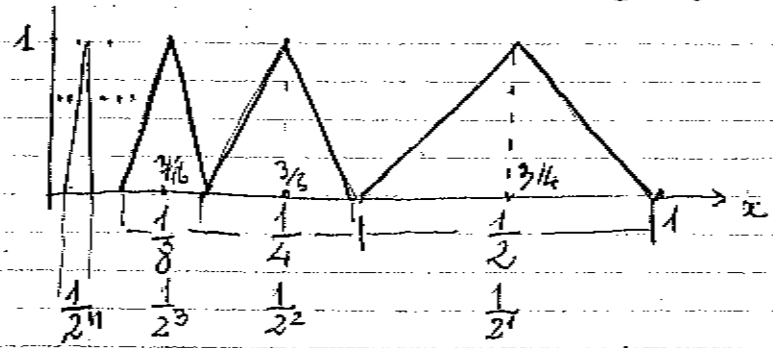
Sol: dato $\varepsilon > 0$ vi è $N \in \mathbb{N}$ $N > \frac{1}{\varepsilon}$ per definizione di $\mathbb{R}$, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ vi è $N \in \mathbb{N}$ per ogni $n \ge N$ si ha $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ ■

- $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad a \ne 1$

- Osservando che per $x \ge 1$ si ha $2x \ge x + 1$ si provi
$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \ge 2^{n-1} + 1 \ge 2^{n-2} + 1 + 1 \dots \ge 1 + \dots + 1 = n$

- Si provi che $\frac{1}{2^n} \to 0, \; n \to \infty$. Analogamente se $0 \le |a| < 1$ si provi che $a^n \to 0, \; n \to \infty$

- Si consideri il seguente grafico



  - Si determinino gli estremi degli intervalli che sono base dei triangoli isosceli
  - Si determini il dominio della funzione
  - Si scriva su ogni intervallo la formula che determina tale grafico.

- Argomento astratto per ottenere che dato $x \in \mathbb{R}$ vi è $n \in \mathbb{N} : n \geq x$ cioè $\mathbb{N}$ è illimitato superiormente: se fosse limitato superiormente vi sarebbe $a = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$: in particolare $a \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ quindi anche $a \geq 2n$ p.a $n \in \mathbb{N}$, quindi $a \gneq \frac{a}{2} \geq n$ p.a $n \in \mathbb{N}$ ma se $a = \sup \mathbb{N}$ non vi sono maggioranti di $\mathbb{N}$ più piccoli.
- Se $|a| \lneq 1$ $\quad 1 + a + a^2 + \dots + a^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1-a}$

  (si scriverà anche $1 + a + a^2 + \dots$ "somma infinita" $= \frac{1}{1-a}$)

- $0,\overline{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots\right) = 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = 1$

- $0,\underbrace{0 \cdots 1}_{k}\underbrace{0 \cdots 1}_{k} \cdots = \frac{1}{10^k} + \frac{1}{10^{2k}} + \frac{1}{10^{3k}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10^k}} - 1 = \frac{1}{10^k - 1} =$

$$= \frac{1}{\underbrace{9 \cdots 9}_{k+1}}$$

- $\sup\left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, $\sup\left\{\frac{x+1}{x-1} : x > 1, x \in \mathbb{R}\right\}$

  $\sup\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, $\sup\left\{\frac{n+1}{n-1} : n > 1, x \in \mathbb{R}\right\}$

  $\sup\left\{\frac{x-1}{x+1} ; x > 1, x \in \mathbb{R}\right\}$, $\sup\left\{\frac{n-1}{n+1} ; n > 1, n \in \mathbb{N}\right\}$

  $\sup\left\{\frac{1-n}{1+n^2} ; n > 1, n \in \mathbb{N}\right\}$, $\sup\left\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

  $\sup\left\{1 + a + a^2 + \dots + a^n : n \in \mathbb{N}\right\}$ ove $a \in]0,1[$

  $\sup\left\{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N} \;\; n^2 \leq 3m^2\right\}$

  $\sup\left\{x \in]1,3[: e^x - e^{-x^2} \geq 0\right\}$

- Quali sono massimi?

- Definizione di ℓ **estremo inferiore** di A confronto definizione di L estremo superiore di A

1) per ogni $a \in A$

$\ell \leq a$ $\qquad\qquad$ $a \leq L$

2) per ogni $x \in \mathbb{R}$

se

per ogni $a \in A$

$x \leq a$ $\qquad\qquad$ $a \leq L$

allora

$x \leq \ell$ $\qquad\qquad$ $L \leq x$

cioè

ℓ è il <u>massimo</u> dei <u>minoranti</u> di A $\qquad$ L è il <u>minimo</u> dei <u>maggioranti</u> di A

- $\inf\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, $\inf\left\{\frac{x+1}{x-1} : x > 1, x \in \mathbb{R}\right\}$

$\inf\{x \in [2, 7[\ : \sin x = 0\}$, $\inf\left\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

$\inf\{x \in [0,1] : x^2 - x + 1 \geq 0\}$

$\inf\{1 - a + a^2 - a^3 + \dots + (-1)^n a^n ; \ n \in \mathbb{N}\}$ $\quad a \in]0,1[$

- Quali sono minimi?

II T pag 2